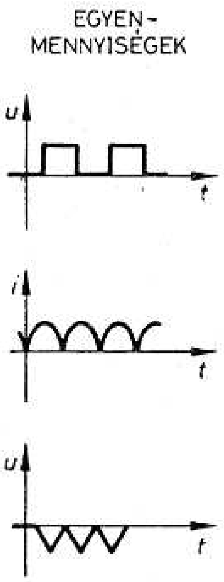
3.5.1. Váltakozó feszültségek és áramok

Időben változó feszültségek és áramok

Az (ideális) galvánelem által szolgáltatott feszültség iránya és nagysága az idő múlásával nem változik. Ha az áramkörben az ellenállás sem változik, az áram is állandó értékű. Az ilyen áramkört nevezik *egyenáramú* áramkörnek.

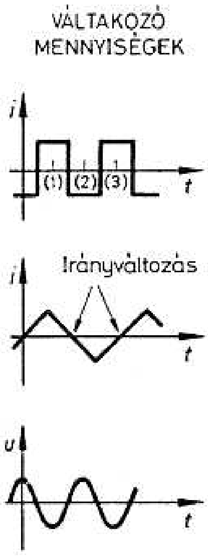
Ha a generátor feszültsége, vagy a terhelő ellenállás nem állandó értékű, az áramerősség is változik.

Ha az áram (ill. feszültség) *iránya állandó*, csak az erőssége változik, ***változó áramú (változó feszültségű)*** áramkörről beszélünk. Az áram (feszültség) idő függvényében történő változását grafikonon ábrázolhatjuk. Az 1. ábra különböző lefolyású változó feszültségeket ill. áramot mutat.



2. ábra
Változó egyenfeszültségek

Az olyan feszültséget vagy áramot, amelynek nem csak a nagysága, hanem iránya is változik, ***váltakozó feszültségnek (váltakozó áramnak)*** nevezik (2. ábra).



2. ábra
Váltakozó áramok és feszültség

A váltakozó feszültség (áram) periodikus, ha az időbeli lefolyását leíró görbe szakaszai szabályszerűen ismétlődnek. A 2. ábra ilyen jelalakokat mutat. A görbe *egymás után azonosan megismétlődő szakasza a* ***periódus***. Egy periódus lejátszódásának az idejét ***periódusidő****nek* nevezik, és **T**-vel jelölik. Az egy másodperc alatt lejátszódó periódusok száma a ***frekvencia***, melynek jele: **f**. Ezt az értéket úgy számíthatjuk ki, hogy megvizsgáljuk, 1 másodpercben hányszor van meg a periódusidő:

$$f = \frac{1}{T}$$

A frekvencia mértékegysége

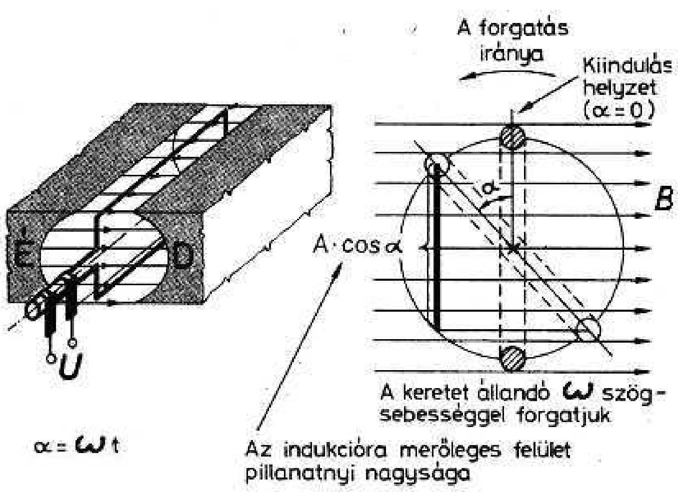
$$[f] = \frac{1}{[T]} = \frac{1}{s} = Hz$$

azaz a ***hertz***. (Az angolszász szakirodalomban használatos a ***cps*** vagy ***c/s*** [cycle per secundum], vagy röviden ***c*** [cycle]). A híradástechnikában a frekvencia nagyobb egységei is használatosak:

1 kHz = 10^3 Hz (= 1 kc/s vagy 1 kc)
1 MHz = 10^6 Hz (= 1 Mc/s vagy 1 Mc)
1 GHz = 10^9 Hz (= 1 Gc/s vagy 1 Gc)

Szinuszos váltakozó feszültség

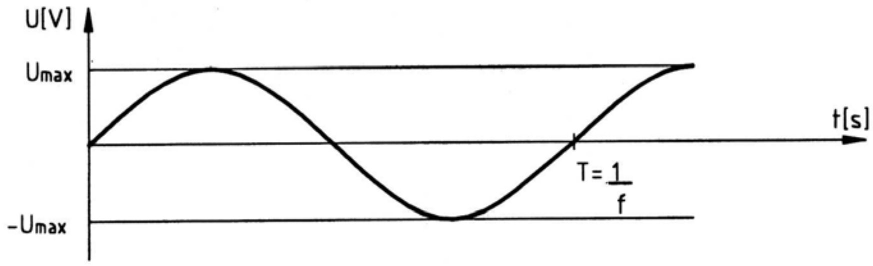
Az elektrotechnikában, híradástechnikában legnagyobb jelentősége a *szinuszos* lefolyású váltakozó feszültségnek van. Ilyen feszültség indukálódik abban a vezetőkeretben, amelyet homogén mágneses térben állandó szögsebességgel forgatunk (3. ábra).



3. ábra

Ha a kiindulási helyzetben a keret függőlegesen áll, forgatásának első pillanatában az indukcióvonalakkal párhuzamosan halad (ld. az ábra jobb oldalát), nem metszi azokat, így nem indukálódik feszültség. Tovább fordulva – a keret vízszintes helyzetéig - azonos idő alatt egyre nagyobb számú indukcióvonalat metsz, így egyre nagyobb feszültség indukálódik a keretben. Az indukált feszültség a csúcsértékét (U_{max}) akkor éri el, amikor a keret vízszintes helyzetben van, és ekkor egy rövid ideig az indukcióvonalakra merőlegesen halad. Ez után az indukált feszültség ismét csökken, amíg a keret 180 fokkal (radiánban kifejezve Π-vel) el nem fordul; ekkor ismét egy pillanatra nem metsz indukcióvonalat, így az indukált feszültség 0 lesz. A keretet tovább forgatva az indukált feszültség a keret vízszintes helyzetéig ismét növekszik, de (mivel a keret vezetői az előzővel ellentétes irányban metszik az indukcióvonalakat), most az indukálódott feszültség iránya megfordul. Amikor a keret kiindulási állapotába tér vissza, az indukált feszültség egy pillanatra megint 0 lesz (ekkor ért véget az első periódus), majd a folyamat ciklikusan ismétlődik.

Az indukált feszültség időbeli lefolyását a 4. ábra mutatja.



4. ábra

Kimutatható, hogy valamely t időpontban az indukált feszültség pillanatértéke

$$u = U_{max} \sin \omega t$$

függvény szerint alakul, ezért az ilyen lefolyású jelet *szinuszjelnek* nevezik. A képletben

u	az indukált feszültség pillanatértéke (V)
U_{max}	az indukált feszültség maximális értéke (csúcsértéke) (V)
ω	a keret szögsebességével megegyező ún. ***körfrekvencia***, $\omega = 2\Pi f = 2\Pi/T$ (rad/s)
t	a kiindulástól számított idő (s)

Megjegyzés: A váltakozó áramokat és feszültségeket – az egyenfeszültségtől való megkülönböztetésül – kis betűkkel (u, i) szokás jelölni.

A szinuszos jel U_{max} maximális értékét, 0-tól való maximális kitérését a jel ***amplitudó****jának* nevezik.

Tekintettel arra, hogy villamos hálózatban is forgó gépekkel állítják elő a villamos energiát, a hálózati feszültség szintén szinuszos lefolyású. Európában a hálózati frekvencia 50 Hz (viszont pl. az USA-ban 60 Hz!).

Példa:
Az 50 Hz-es hálózati feszültség csúcsértéke 310V. Mekkora a feszültség pillanatértéke a nullátmenettől számítva 4 ms időpontban?
Megoldás: (minden adatot a képletben megadott mértékegységben írunk be, így az eredményt is abban kapjuk. 4ms = 0,004s)
A körfrekvencia $\omega = 2\Pi f = 2*3{,}14*50 = 314$ rad/s.
$u = U_{max} \sin \omega t = 310*\sin 314*0{,}004 = 310 * \sin 1{,}256 = 310 * 0{,}95 = 294{,}7V$

A szinuszos váltakozó feszültség középértékei

Ha szinuszos feszültséget szolgáltató feszültségforrásra fogyasztót kapcsolunk, azon szintén szinuszos lefolyású áram alakul ki. Tekintettel arra, hogy e váltakozó mennyiségek pillanatértékei negatív és pozitív csúcsértékei között folyamatosan változnak, különféle (hő, vegyi) hatásai sem a csúcsértékkel, hanem valamilyen *középértékkel* arányosak.

A villamos áram ***effektív érték****e* (vagy négyzetes középértéke) az áram hőhatására ad útmutatást. *Az effektív érték annak az egyenáramnak az értékével egyenlő, amely azonos idő alatt ugyanakkora munkát végez (hőt termel), mint a vizsgált váltakozóáram.*
(Az effektív értéket azért hívják négyzetes középértéknek, mert ha R ellenálláson **I** áram folyik keresztül, azon $U = I * R$ feszültség esik, és $P = U * I = I * R * I = I^2 * R$ teljesítmény alakul hővé; így az effektív érték az áram négyzetével arányos középérték.) Kimutatható, hogy **szinuszos** jel esetén

$$I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \qquad \text{illetve} \qquad U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$$

Megállapodás szerint ***a szinuszos váltakozó feszültség (vagy váltakozó áram) értékeként az effektív értéket adják meg***. (Pl. a 230V-os hálózati feszültség effektív értéke 230V.) A szinuszos feszültséget vagy áramot mérő műszerek is az effektív értéket mutatják.

Az áram ***elektrolitikus középértéke*** (vagy számtani, vagy egyenirányított középértéke) az áram vegyi hatása alapján számítható. Az elektrolízis során ui. az áram hatására az elektrolitba merülő elektródákon anyag választódik ki. *Az elektrolitikus középérték annak az egyenáramnak az értékével egyenlő, amely azonos idő alatt ugyanakkora anyagmennyiséget választ ki, mint az egyenirányított váltakozóáram.* Kimutatható, hogy **szinuszos** jel esetén

$$I_{el} = \frac{2I_{max}}{\Pi} \qquad \text{illetve} \qquad U_{el} = \frac{2U_{max}}{\Pi}$$

Példa:
1. Mekkora a 100V csúcsértékű szinuszos feszültség effektív értéke, ill. elektrolitikus középértéke?
Megoldás:

$$U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{100}{1{,}41} = 70{,}7V$$

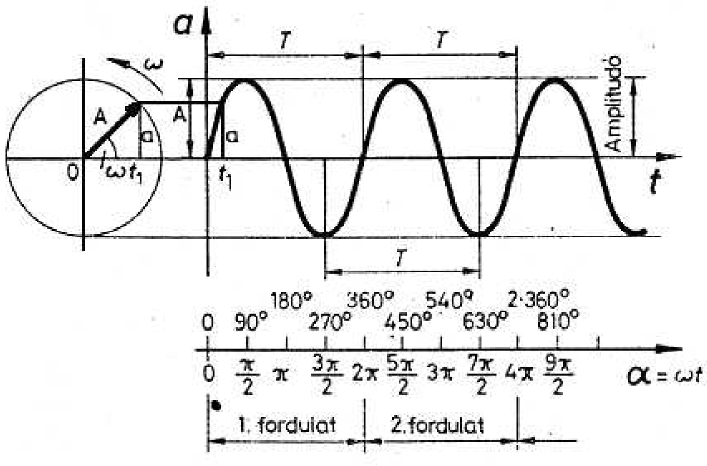
$$U_{el} = \frac{2U_{max}}{\Pi} = \frac{2 \cdot 100}{3{,}14} = 63{,}6V$$

2. Mekkora a csúcsértéke a 230V-os hálózati feszültségnek?
Megoldás:
A megadott 230V a szinuszos hálózati feszültség effektív értéke. Az effektív értékre vonatkozó képlet átrendezésével

$$U_{max} = \sqrt{2}\, U_{eff} = 1{,}41 * 230 = 325{,}2\ V$$

A szinuszos váltakozó feszültség ábrázolása forgó vektorral

Az 5. ábra bal oldalán egy vízszintes és függőleges egyenes a 0 pontban metszi egymást. A 0 pont körül ω szögsebességgel körbe forog az A amplitudójú vektor. Ha a vektor kiinduláskor (t = 0) vízszintes helyzetben van, t = t_1 időpontban ωt_1 szöggel fordul el, és a függőleges tengelyre való vetülete a = A sin ωt_1. A forgó vektor függőleges tengelyre való vetületének időfüggvénye (ld. ábra jobb oldalán) ugyanolyan szinuszos lefolyású, mint az u = U_{max} sin ωt váltakozófeszültség.



5. ábra

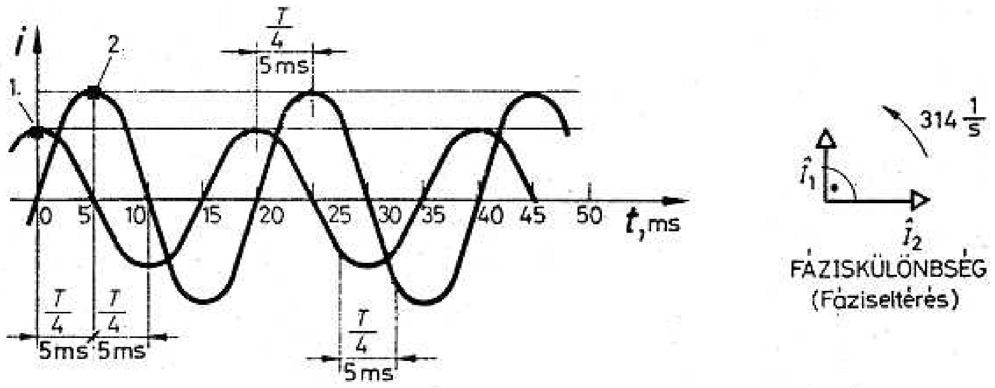
u

A szinuszosan váltakozó mennyiséget (feszültséget, áramot) tehát felfoghatjuk úgy, mint egy, a jel U_{max} csúcsértékével (amplitudójával) megegyező nagyságú, és $\omega = 2 * \Pi * f$ körfrekvenciájával forgó vektornak a függőleges tengelyre való vetületét.

A forgó vektornak a periódus kezdetétől a vizsgált pillanatig megtett szögelfordulása a ***fázisszög***.

Fázishelyzet, fáziskülönbség

Elképzelhető, hogy két szinuszos lefolyású mennyiség ugyanolyan frekvenciájú, de nullátmeneteik nem azonos időpontra esnek. Ilyen jeleket láthatunk a 6. ábrán.



6. ábra

Mindkét jel 50 Hz-es frekvenciájú (T=20 ms), de az 1. görbe szerinti áram maximuma a t = 0 (ill. 20, 40 stb.) ms pillanatra esik, a 2. görbe szerinti áram pedig maximális értékét a t=5 (ill. 25, 45, stb.) ms pillanatokban veszi fel.

A 2. görbe szerinti áram időfüggvénye megegyezik a korábban bemutatottakkal, behelyettesítve az $\omega = 2 * \Pi * f = 2 * \Pi * 50 = 314$ rad/s értéket:

$$i_2 = I_{2max} \sin 314\, t$$

Az 1. görbe szerinti áramnak azonban a t=0 időpillanatban van maximuma, és minimális értékét csak egy negyed periódus lezajlása után, t=5 ms időpontban éri el. Az ábra jobb oldalán látható, hogy ez az áram is megfeleltethető egy forgó vektor függőleges tengelyre való vetületének, csak ez a vektor t = 0 időpontban nem vízszintesen áll, hanem függőlegesen, azaz (ω az óramutató járásával ellentétes forgásirányát tekintve) I_2 áram vektorához képest 90°-al (ívszögben kifejezve $\Pi/2$ radiánnal) *siet*.

I_1 időfüggvénye ennek értelmében:

$$i_1 = I_{1max} \sin (314t + \Pi/2)$$

A két, azonos frekvenciájú áram időbeli lefolyásának különbségét fázisszögük különbségével, a ***fáziskülönbségük****kel* jellemezhetjük. A fáziskülönbség a két áramot jelképező vektor egymáshoz viszonyított szögével azonos (a fenti példában ez 90°, azaz $\Pi/2$ radián).

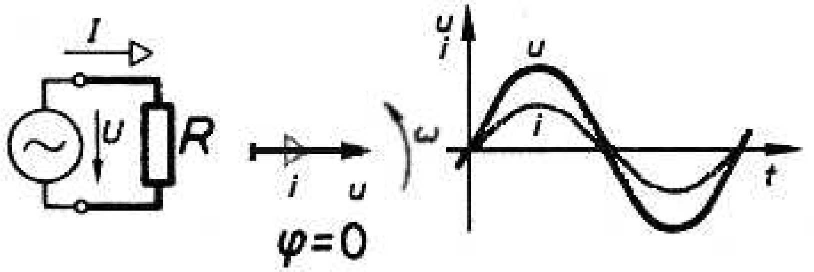
3.5.2. Váltakozóáramú körök elemei

A váltakozófeszültségre kapcsolt ellenállás

Ha R (ideális) ellenállásra u váltakozófeszültséget kapcsolunk, azon i áram indul meg. Az Ohm-törvény a pillanatértékekre is érvényes, ezért

$$i = \frac{u}{R}$$

azaz az áram a feszültség ütemében változik, a két mennyiségnek egyszerre van a nullátmenete, a maximális és a minimális értéke: az ellenálláson átfolyó áram és a rajta eső feszültség között nincs fáziskülönbség (7. ábra).

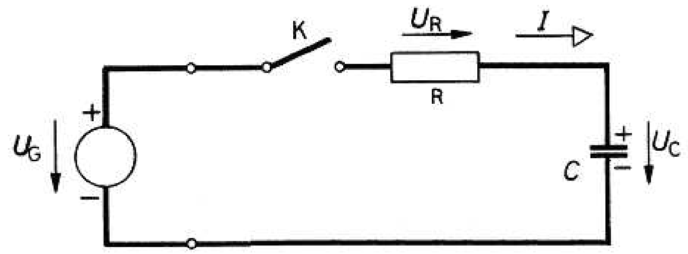


7.ábra

Az R ellenállást váltakozóáramú áramkörökben **ohmos** vagy **hatásos** ellenállásnak nevezik. A sorosan ill. párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredőjét ugyanolyan módon számíthatjuk ki, mint egyenáram esetén.

<u>Kondenzátor töltési folyamata</u>

Kapcsoljunk U_G egyenfeszültségű generátorra a 8. ábrán látható módon sorba kapcsolt R ellenállást és C kondenzátort. A K kapcsoló nyitott állásában a töltetlen kondenzátor kapocsfeszültsége 0, a kapcsolóval megszakított áramkörben áram nem folyik.



8. ábra

A kapcsoló zárásának pillanatában (t = 0) a kondenzátor kapocsfeszültsége 0. Kirchhoff huroktörvénye értelmében a kondenzátorra és az ellenállásra jutó feszültség együttesen adja ki a generátor feszültségét. Most $U_C = 0$, ezért a teljes U_G feszültség R ellenállásra kapcsolódik, és azon

$$I_0 = \frac{U_R}{R} = \frac{U_G}{R}$$

áram indul meg. Ez az áram tölti C kondenzátort, ezért C kapocsfeszültsége növekszik. Viszont – a már említett huroktörvény értelmében – minél nagyobb U_C, annál kevesebb lesz U_R, így a hurokban

$$I = \frac{U_R}{R}$$

töltő áram annál jobban csökken. Ha a töltő áram csökken, a kondenzátor kapocsfeszültsége egyre kisebb mértékben emelkedik (9. ábra). A töltési folyamat végén U_C megegyezik U_G-vel, I = 0, az R ellenálláson nem esik feszültség.

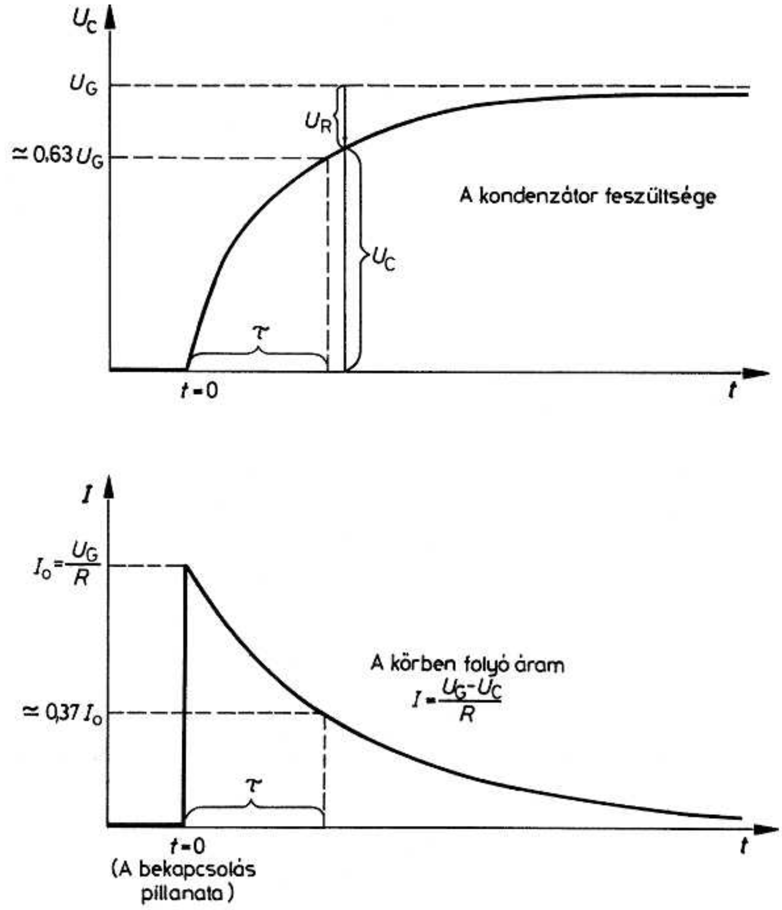
Kimutatható, hogy a kondenzátor feszültségének időbeli lefolyása *exponenciális* görbe szerint megy végbe. A kondenzátor kapacitásának (C) és az ellenállás értékének (R) szorzata egy τ (tau) –val jelölt időállandót ad meg:

$$\tau = R\,C$$

ahol

τ	az időállandó (s)
R	az ellenállás (Ω)
C	a kondenzátor kapacitása (F)

τ idő alatt a kondenzátor a generátor feszültségének kb. 63%-ára töltődik, ugyanennyi idő alatt a töltőáram kb. 37%-ára csökken. Gyakorlatilag 3-5 τ idő alatt a kondenzátor teljesen feltöltődik.

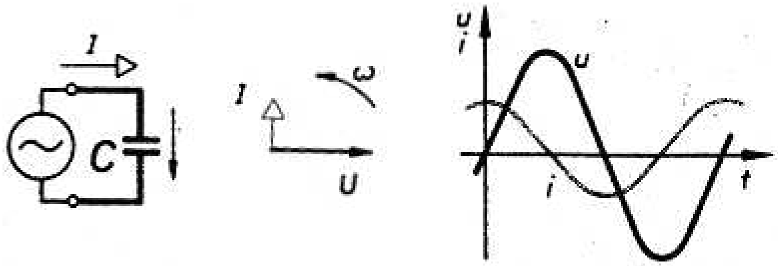


9. ábra

Figyeljük meg, hogy a töltődő kondenzátoron a töltés megkezdésekor a feszültség (U_C) 0, ugyanekkor a töltőáram maximális értékű. A töltődés befejezésekor viszont a töltőáram 0, ekkor viszont U_C maximális.

<u>A váltakozófeszültségre kapcsolt kondenzátor</u>

Ha a 10. ábra szerinti kapcsolásban egy kondenzátort váltakozóáramú generátorra kapcsolunk, a generátor feszültségének állandó változása következtében a kondenzátor mintegy „folyamatosan áttöltődik”, így rajta folyamatosan váltakozó áram folyik. Matematikai eszközökkel kimutatható, hogy az így kialakuló áram és a kondenzátor kapocsfeszültsége között hasonló jellegű a kapcsolat, mint az egyenfeszültségről, ellenálláson keresztül töltött kondenzátor esetében: amikor a kondenzátor kapocsfeszültsége 0, akkor folyik a legnagyobb töltőáram, és amikor kapocsfeszültsége a maximális, a töltő áramnak épp akkor van a 0-átmenete (10. ábra).



10. ábra

Megállapíthatjuk, hogy (szinuszos áramú áramkörben) a kondenzátoron az *átfolyó áram és a kapocsfeszültség között 90° (Π/2 radián) fáziseltérés mutatkozik*, és pedig - ω irányát figyelembe véve - *az áram siet a feszültséghez képest*.

Kimutatható, hogy a kialakuló áram nagysága

$$i = u\,\omega\,C$$

A kondenzátorra kapcsolt váltakozó feszültség és az ennek hatására kialakuló áram hányadosa Ohm törvénye értelmében egy *ellenállás* dimenziójú mennyiséget határoz meg, melyet a kondenzátor ***reaktanciájának*** vagy ***meddő ellenállásának*** neveznek és ***X_C***-vel jelölnek. A képlet átrendezésével:

$$X_C = \frac{u}{i} = \frac{1}{\omega C}$$

ahol

X_C a kondenzátor reaktanciája vagy meddő ellenállása (Ω)

ω a körfrekvencia, ω = 2 Π f (rad/s)

C a kondenzátor kapacitása (F)

A ***reaktancia*** vagy ***meddő ellenállás*** kifejezés arra utal, hogy – ellentétben az *ohmos* vagy *hatásos* ellenállással – az áram és a feszültség között 90°-os fáziskülönbség van. A kondenzátor reaktanciáját szokás *kapacitív reaktanciának* nevezni.

Példa

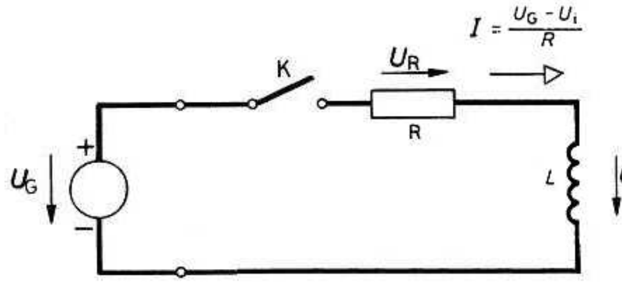
Határozzuk meg egy 27 nF kapacitású kondenzátor raktanciáját f = 100 kHz frekvencián!

Megoldás: (a képletbe minden mennyiséget az ott megadott alapegységben helyettesítünk be)

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2 \cdot \Pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \Pi \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 27 \cdot 10^{-9}} = 5894{,}6\Omega$$

Tekercs (induktivítás) bekapcsolás folyamata egyenáramú áramkörben

A 11. ábra szerinti áramkörben U_G egyenfeszültségű generátorra a sorosan kapcsolt R ellenállás és L induktivitás kapcsolódik. K kapcsoló nyitott állásában az áramkörben nem folyik áram, az ellenálláson eső U_R és a tekercsen mérhető U_L feszültség egyaránt 0.



11. ábra

A kapcsoló zárásakor az áramkörben áram indul meg. Ennek nagysága (mivel az R ellenállásra - Kirchhoff huroktörvénye értelmében - U_G generátorfeszültség és U_L feszültség különbsége jut)

$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{U_G - U_L}{R}$$

lesz.

A tekercsen eső U_L feszültség nem más, mint az áramváltozás hatására a tekercsben indukálódott feszültség (hiszen az ideális tekercsnek 0 az ohmos ellenállása, így azon a kialakuló áramtól függetlenül nem eshet feszültség). Az indukálódott

$$U_i = L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

feszültség iránya Lenz törvénye értelmében olyan, hogy akadályozza az áram kialakulását, mintegy szembekapcsolódik a generátor feszültségével.

A bekapcsolás pillanatában I = 0, ami azt jelenti, hogy az R ellenálláson nem esik feszültség: ekkor a tekercsben indukálódott feszültség megegyezik a generátor feszültségével.

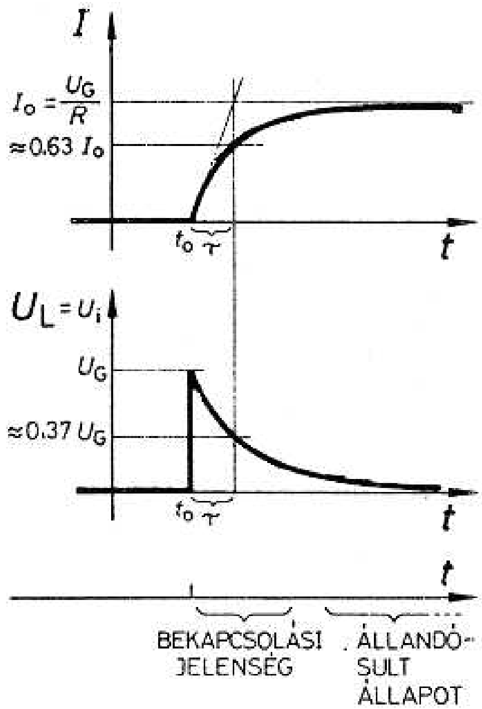
Az áram azonban folyamatosan növekszik (hiszen a tekercsben a feszültséget éppen az áram változása indukálja), így az ellenálláson egyre nagyobb feszültség esik, és egyre kisebb feszültség jut a tekercsre. Így egyre kevesebb lesz a tekercsre jutó

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

indukált feszültség is, azaz az áram növekedésének az üteme ($\Delta I/\Delta t$) is. Végül az áram

$$I = \frac{U_G}{R}$$

értéken stabilizálódik, $\Delta I/\Delta t = 0$ lesz, így a tekercsen nem indukálódik feszültség. Kimutatható, hogy az áram kialakulása (illetve a tekercsen a feszültség csökkenése) *exponenciális* lefolyású (12. ábra).



12. ábra

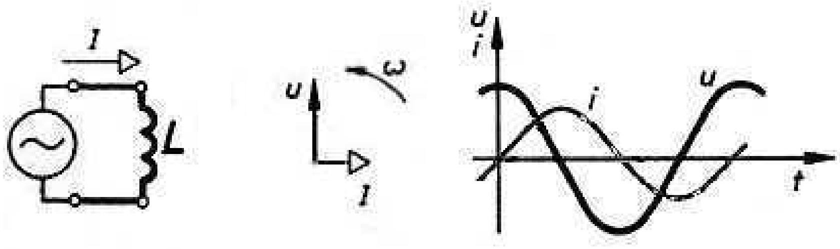
Az ábrán τ-val jelölt időállandó értéke L/R (ha L-t H-ban, R-t Ω-ban helyettesítjük be, τ-t s-ban kapjuk). Ennyi idő alatt csökken a tekercs feszültsége a generátor feszültségének megközelítőleg 37%-ára, illetve nő az áram a végleges érték kb. 63%-ára.

3-5 τ idő alatt gyakorlatilag kialakul a végleges áramerősség, és a tekercsen indukálódott feszültség 0-ra csökken.

Figyeljük meg, hogy a tekercsen a bekapcsoláskor az áram 0, a feszültség maximális értékű volt, a végleges állapot kialakulásakor pedig a feszültség 0, és az áram maximális.

A váltakozó feszültségre kapcsolt tekercs (induktivitás)

A 13. ábra szerinti kapcsolásban a szinuszos váltakozó feszültségű generátorra L induktivitás kapcsolódik. A generátor feszültségének állandó változása következtében a tekercsen indukálódó feszültség (és így a kialakuló áram is) folyamatosan változik, az áramkörben váltakozó áram folyik.



13. ábra

A tekercsben önindukció útján keletkező feszültség mindig megegyezik a generátor feszültségével. Az

$$U_i = L\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

összefüggés alapján belátható, hogy ez a feszültség akkor a legnagyobb, amikor az áram változási sebessége a legnagyobb: az áram nullátmeneténél. Amikor viszont az áram változási sebessége 0 (a pozitív ill. negatív csúcsértékénél), akkor az indukált feszültség értéke 0.

Tehát a tekercsen kialakuló áram és feszültség között hasonló a kapcsolat, mint az egyenfeszültségre kapcsolt tekercs bekapcsolási folyamatánál: a feszültség maximális értékénél az áram 0, az árammaximum időpontjában pedig a feszültségé.

Megállapítható, hogy (szinuszos áramú áramkörben) a tekercsen az *átfolyó áram és a kapocsfeszültség között 90° (Π/2 radián) fáziseltérés mutatkozik*, és pedig *a feszültség siet az áramhoz képest*.

Kimutatható, hogy a kialakuló áram nagysága

$$i = \frac{u}{\omega L}$$

A feszültség és az áram hányadosa itt is *ellenállás* dimenziójú mennyiséget (az áram és a feszültség közötti 90° (Π/2 radián) fáziskülönbség figyelembe vételével ***reaktanciát***) határoz meg, melynek értéke a képlet átrendezésével:

$$X_L = \frac{u}{i} = \omega L$$

ahol

X_L	a tekercs (induktivitás) reaktanciája, meddő ellenállása (Ω)
ω	a körfrekvencia (ω = 2 Π f) (rad/s)
L	a tekercs induktivitása (H)

A tekercs reaktanciáját ***induktív raktanciának*** nevezik.

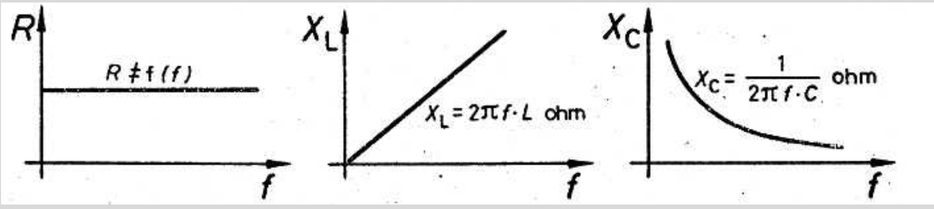
Példa:

1. Mekkora reaktanciát tanúsít 1 kHz frekvencián egy L=150 mH induktivitású tekercs?

Megoldás: (az adatokat Hz-ben, H-ban helyettesítjük be, így az eredményt Ω-ban kapjuk)

$$X_L = \omega L = 2\Pi f L = 2*3{,}14*1000*0{,}15 = 942{,}47\ \Omega$$

2. Hogyan alakul a frekvencia függvényében az ohmos ellenállás, az induktivitás illetve a kondenzátor ellenállása ill. reaktanciája?
Válasz: ld. a 14.ábrát.



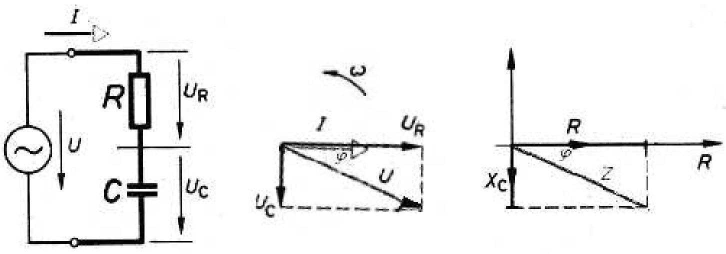
14. ábra

3.5.3. Váltakozóáramú körök számításai

Az impedancia fogalma

A 15. ábra szerinti kapcsolásban a soros R ellenállásból és C kondenzátorból álló áramkört kapcsoljuk a szinuszjelet szolgáltató U generátorra.

A kialakuló I áram mindkét sorba kapcsolt áramköri elemen azonos lesz. Az ellenálláson eső feszültség fázisban van az átfolyó árammal (a kettő hányadosa adja az R ellenállás értéket), a kondenzátoron a feszültséghez képest az áram 90 fokot siet (e kettő hányadosa pedig X_C reaktancia).



15. ábra

Az ábra középső részén láthatjuk a fázisviszonyokat. Az I áramot képviselő vektor vízszintesen jobbra mutat. Az ellenálláson eső feszültség fázisban van az átfolyó árammal, ezért U_R feszültséget jelképező vektor szintén vízszintes, jobbra mutató. A kondenzátoron a feszültség 90 fokot késik I áramhoz képest, ezért (ω forgásirányát is figyelembe véve) az U_C-t jelképező vektor függőlegesen lefelé irányul. A generátor **U** feszültsége $\mathbf{U_R}$ és $\mathbf{U_C}$ vektorok **eredője**ként adódik.

Látható, hogy a generátor U feszültsége és a kialakuló **I** áram között φ fáziskülönbség van: az áram siet a feszültséghez képest. E két mennyiség hányadosa ellenállás jellegű értéket ad, amelyet ***impedanciának*** *(váltakozóáramú ellenállásnak)* neveznek, és **Z**-vel jelölnek (mértékegysége: Ω).

Ha az ábra középső részén látható vektorábra feszültségeinek értékét osztjuk **I**-vel, $U_R/I=R$, $U_C/I=X_C$, $U/I=Z$ összefüggéseket kapjuk, ezt ábrázoltuk az ábra jobb oldalán. Z az átfogója egy derékszögű háromszögnek, melynek R és X_C a befogói. Így Z abszolút értéke

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

fázisszöge pedig

$$\varphi = -\arctan\frac{X_C}{R}$$

Az **impedancia** tehát az áramkörben kialakuló feszültség és áram értékének hányadosa, amelynek része lehet ohmos ellenállás és reaktancia. Az ohmos és reaktáns komponenseket a fázisviszonyok figyelembe vételével, vektori összegzéssel kell összevonni.

Határfrekvencia

Az ohmos ellenállásból és reaktáns elemből álló áramkörben gyakran van szükség annak a frekvenciának ($\mathbf{f_h}$ ***határfrekvenciának***) a meghatározására, amikor az áramkör ohmosból reaktáns jellegűvé válik. Ez azon a frekvencián következik be, amikor az ohmos ellenállás megegyezik a reaktancia értékével. Pl. a 15. ábra szerinti áramkörben ekkor

$$R = X_C = \frac{1}{\omega_h C} = \frac{1}{2\Pi f_h C}$$

amiből f_h illetve ω_h kifejezhető:

$$\omega_h = \frac{1}{RC} \qquad f_h = \frac{1}{2\Pi RC}$$

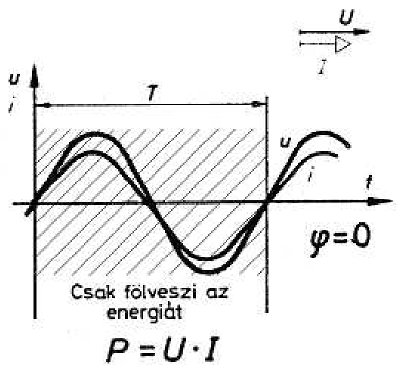
Ezen a frekvencián a $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ összefüggés szerint az impedancia $\sqrt{2}R$ értékű.

Teljesítmény számítása váltakozóáramú áramkörben

Ha az áramkörben nem csak ellenállás, hanem reaktáns elem (tekercs vagy kondenzátor) is jelen van, a feszültség és a kialakuló áram között fáziskülönbség lehet.

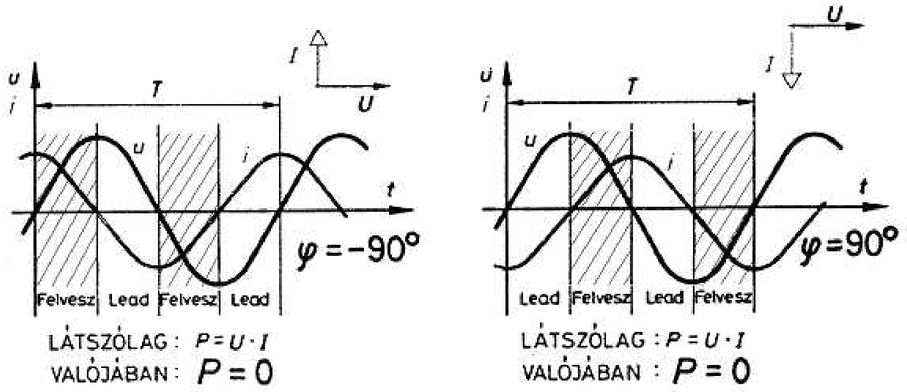
A teljesítmény kiszámításánál azt kell figyelembe vennünk, hogy amikor az áramkör valamely elemén a feszültség és az áram azonos irányú, akkor az adott elem teljesítményt vesz fel (azaz fogyasztó), amikor pedig a feszültség és az áram ellentétes irányú, akkor teljesítményt ad le, (azaz generátor).

A 16. ábra a feszültség és áram alakulását *ohmos ellenálláson* mutatja. A fáziskülönbség 0, a feszültség és az áram iránya a teljes T periódusidő alatt megegyezik, így az ellenállás mindig fogyasztó: a felvett P = U I (az effektív értékeket kell figyelembe venni, az eredmény mértékegysége: W) ***hatásos*** teljesítményt hővé alakítja.



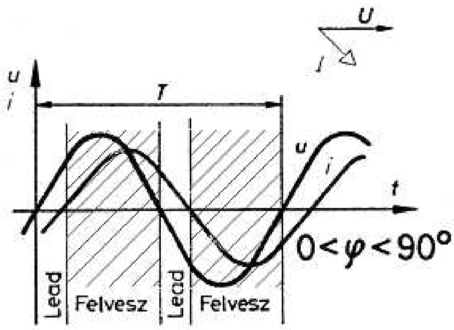
16. ábra

Kapacitív illetve induktív reaktancián a feszültség és az áram között 90 fok fáziseltérés van. A 17. ábrából láthatjuk, hogy ilyenkor a reaktáns elemen egy negyed periódusideig az áram és feszültség azonos, majd egy negyed periódusideig ellentétes irányú, azaz ez egyik negyed periódusidő alatt felvett teljesítményt a következő negyed periódusidő alatt leadja. Ilyen formán a reaktáns elem valóságos teljesítményt nem vesz fel (P = 0 W, az U I szorzat ebben az esetben az ún. ***meddő*** *(vagy reaktáns) teljesítményt* adja, melynek mértékegysége: VAr).



17. ábra

A 18. ábrán 0…90 fok közötti fázistolású hálózat feszültség és áram görbéit láthatjuk. A hálózat hosszabb ideig vesz fel energiát, mint ameddig lead, tehát összességében fogyasztó.



18. ábra

Ekkor az áramkör által fogyasztott un. ***hatásos*** teljesítmény

$$P = U\,I\cos\varphi\ \ (W),$$

a ***meddő*** teljesítmény pedig

$$Q = U\,I\sin\varphi\ (VAr).$$

A feszültség és az áram szorzatát ***látszólagos*** teljesítménynek nevezik, és S-el jelölik, mértékegysége: VA (voltamper):

$$S = U\,I$$

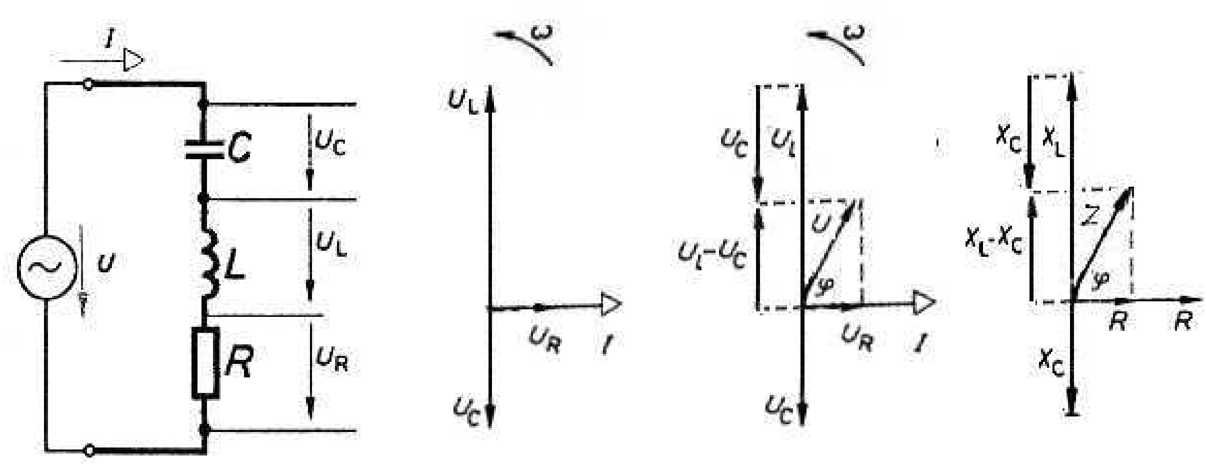
3.5.4 Rezgőkörök

Soros RLC kör

Az ohmos és reaktáns elemekből összeállított áramkörök között kitüntetett szerepe van a kondenzátorból, tekercsből (és ellenállásból) álló áramkörnek.

(Az ellenállást gyakorlati számításokban nem célszerű kihagyni, így vehetjük figyelembe a valóságos tekercs veszteségi ellenállását.)

A soros áramkört és a fázisviszonyokat a 19. ábrán láthatjuk (A soros RLC kört később tisztázandó okból soros ***rezgőkör****nek* nevezik.)



19. ábra

Mindhárom sorba kapcsolt elemen ugyanaz az I áram folyik keresztül, a vektorábrán ezt a vízszintesen jobbra mutató I vektor jelzi. Az ellenálláson eső U_R feszültség fázisban van az árammal, ezért azzal azonos irányú. A tekercsen indukálódó U_L feszültség az áramhoz képest 90 fokkal siet, ezért függőleges, felfelé irányított vektor jelzi. A kondenzátoron eső U_C feszültség az átfolyó áramhoz képest 90 fokkal késik, ezért az ennek megfelelő vektor lefelé irányul (bal oldali vektorábra).

A generátor U feszültsége e három feszültség (U_R, U_L, U_C) vektori eredője. Mivel U_L és U_C ellentétes irányú, e két feszültség eredője a két feszültség különbsége; a példában U_L a nagyobb értékű, ezért a különbségi feszültség (U_L – U_C) vektora felfelé irányul. Ezt a feszültséget kell vektori módon összegezni U_R –el (középső vektorábra), az eredő U feszültséggel egyezik meg.

Az impedancia kiszámításához (jobb oldali vektorábra) valamennyi feszültséget elosztottuk I árammal, így olyan derékszögű háromszög adódik, melynek átfogója Z, befogói R és (X_L – X_C). Ebből adódik, hogy

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

és

$$\varphi = \arctan\frac{X_L - X_C}{R}$$

Tekintettel arra, hogy X_L és X_C a frekvencia függvényében változik, Z értéke is a frekvenciától függ (20. ábra). A képletből kiolvasható, hogy azon a frekvencián, ahol $X_L = X_C$, a két mennyiség különbsége 0, és itt Z = R, azaz az áramkör R-el megegyező ohmos ellenállást tanúsít. Ezt a frekvenciát ***rezonanciafrekvenciá****nak* nevezik és **f_0**- al (az ennek megfelelő körfrekvenciát **ω_0**-al) jelölik.

Mivel $X_L = \omega L$, és $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$, és a rezonanciafrekvencián e két mennyiség egyenlő,

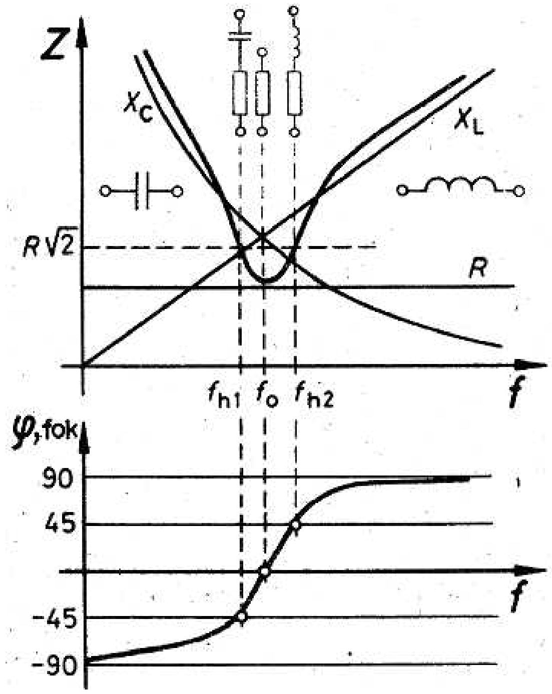
$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\Pi} = \frac{1}{2\Pi\sqrt{LC}}$$

Ez, a rezonanciafrekvencia meghatározására szolgáló képlet az ún. ***Thomson-képlet****.*



20. ábra

A 20. ábrán Z impedanciát (és annak komponenseit) ill. φ fázisszöget ábrázoltuk a frekvencia függvényében.

Z komponensei:

-R, melynek ellenállása a frekvencia függvényében nem változik,

$-X_L = \omega L = 2\,\Pi\, f\, L$ a frekvenciával arányosan nő,

$-X_C = 1/\omega C = 1\,/\,2\,\Pi\, f\, C$ a frekvencia növekedtével a görbe szerint csökken.

Kis frekvenciákon ($f \ll f_0$) a három komponens közül X_C a domináns, a soros RLC kör mint sorosan kapcsolt ellenállás és kondenzátor viselkedik, ennek megfelelően a fázisszög is a kapacitív reaktancia –90 fokos szögéhez közelít.

Rezonanciafrekvencián ($f = f_0$) a kapacitív és induktív reaktancia megegyezik, de ellentétes fázisszögüknél fogva „kiejtik egymást”, és a rezgőkör csak R ellenállást mutatja.

A frekvencia növekedtével ($f \gg f_0$) egyre inkább az induktív reaktancia válik dominánssá, a soros RLC kör mint ellenállás és sorba kapcsolt tekercs viselkedik, e szerint alakul a +90 fokhoz közelítő fázisszög is (ilyen a viszonyokat mutatnak be a 19. ábra vektordiagramjai is).

Nagy jelentősége van annak a két frekvenciának, amelynél a rezgőkör impedanciájának valós és képzetes része megegyezik (f_{h1}, f_{h2}). Ezeken a frekvenciákon $R = (X_L - X_C)$ vagy $R = (X_C - X_L)$, így

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2R^2} = \sqrt{2}R$$

Az $f_{h2} - f_{h1}$ frekvenciakülönbséget a rezgőkör ***sávszélességé**nek* nevezik, és **B** –vel jelölik (mértékegysége: Hz):

$$B = f_{h2} - f_{h1}$$

A rezonanciafrekvencia és a sávszélesség hányadosa a rezgőkör ***jóság**a*, jele: **Q** (mértékegység nélküli viszonyszám).

$$Q = \frac{f_0}{B}$$

A képlet átrendezésével megkaphatjuk a rezgőkör sávszélességét, ha ismert a rezonanciafrekvencia és a kör jósága:

$$B = \frac{f_0}{Q}$$

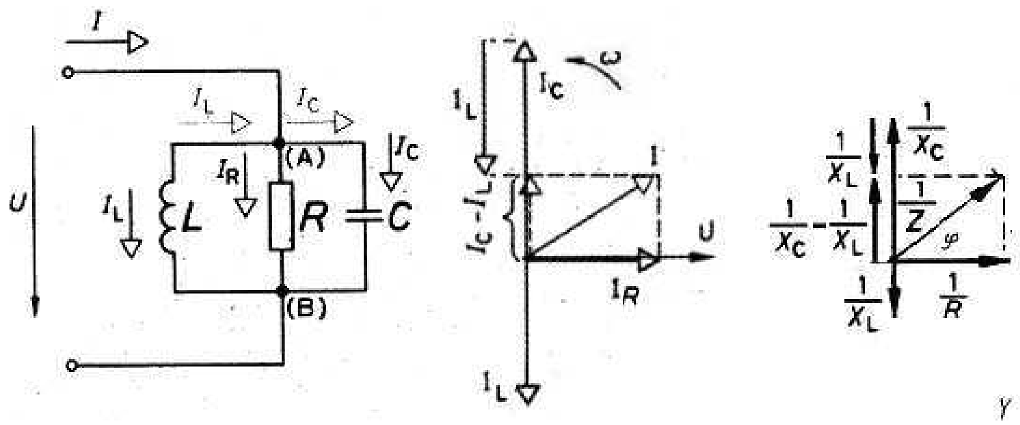
A soros rezgőkör jósága a

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

képlet segítségével határozható meg.

Párhuzamos rezgőkör

R ellenállás, C kondenzátor és L tekercs párhuzamos kapcsolásával ***párhuzamos rezgőkör****höz* jutunk (21. ábra).



21. ábra

A párhuzamos áramköri elemek mindegyikére U szinuszos váltakozó feszültség kapcsolódik (a bal oldali vektorábrán a feszültség vektora vízszintesen, jobbra irányul). Az ellenálláson átfolyó I_R áram a feszültséggel fázisban van, vektora ugyanebbe az irányba mutat. A kondenzátoron I_C áram a feszültséghez képest 90 fokkal siet, vektora függőlegesen felfelé irányul. A tekercs I_L árama 90 fokkal késik, vektora függőlegesen lefelé mutat.

A rezgőkörön kialakuló I áram I_R, I_L és I_C vektori összegeként adódik. I_L és I_C ellenfázisú, egymásból kivonódnak. Az ábrán I_C a nagyobb, ezért eredőjük I_C irányú, nagysága $I_C - I_L$ (középső ábrarész). Ha most mindegyik áramot elosztjuk a közös U feszültséggel, az ellenállás ill. a reaktanciák reciprokát kapjuk (az ábra jobb oldalán). 1/Z egy derékszögű háromszög átfogója, 1/R és ($1/X_C$-$1/X_L$) a befogói, így

$$\left(\frac{1}{Z}\right)^2 = \left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2$$

ebből

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}}$$

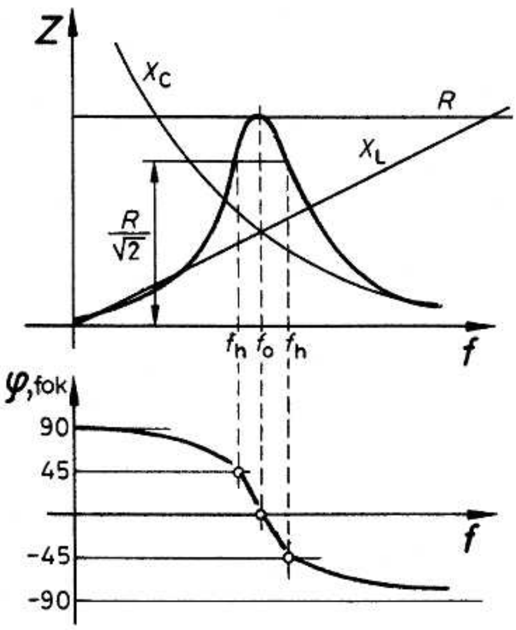
illetve

$$\varphi = \arctan \frac{\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}}{\frac{1}{R}}$$

Ugyanúgy mint a soros rezgőkörnél, azt az f_0 frekvenciát, ahol $X_C = X_L$ rezonanciafrekvenciának nevezik. (Meghatározása a Thomson-képlet segítségével:

$$f_0 = \frac{1}{2\Pi\sqrt{LC}}$$

történik). Ezen a frekvencián a kondenzátoron és a tekercsen ellentétes irányú, azonos nagyságú áram folyik, ezek egymást kiegyenlítik, és a rezgőkör R ohmos ellenállást tanúsít. Minden más frekvencián reaktáns áram is folyik, ezért a rezgőkör impedanciája csökken (22. ábra).
Kisebb frekvenciákon a tekercs jelenti a kisebb reaktanciát, így a rezgőkör impedanciája induktív jellegű, míg a rezonanciafrekvencia felett a kapacitív reaktancia a kisebb, ezért az impedancia kapacitív jellegű.



22.ábra

A sávszélesség annak a két frekvenciának (f_{h2} és f_{h1}) a különbsége, ahol a párhuzamos rezgőkör impedanciája a rezonanciafrekvencián mért érték $1/\sqrt{2}$ részére csökken:

$$B = f_{h2} - f_{h1}$$

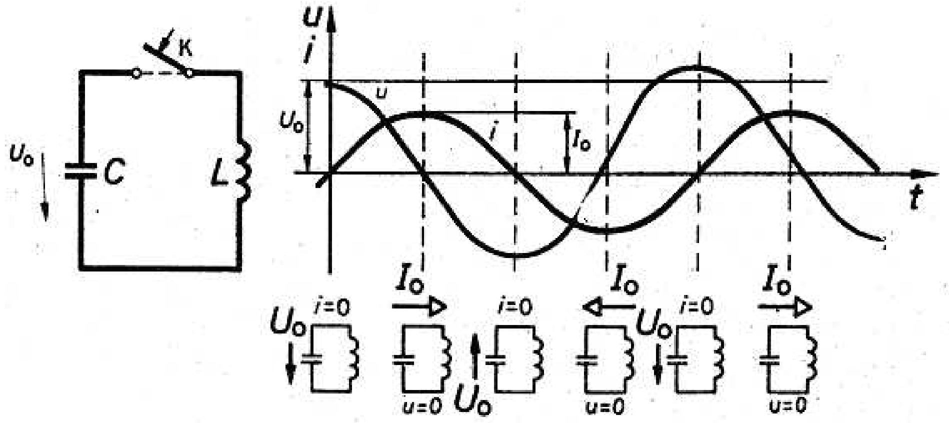
A párhuzamos rezgőkör jósága a

$$Q = \omega_0 CR$$

összefüggésből számítható ki.

Hogyan „rezeg” a rezgőkör?

Töltsük fel a 23. ábrán látható C kondenzátort U_0 feszültségre, majd zárjuk a K kapcsolót.



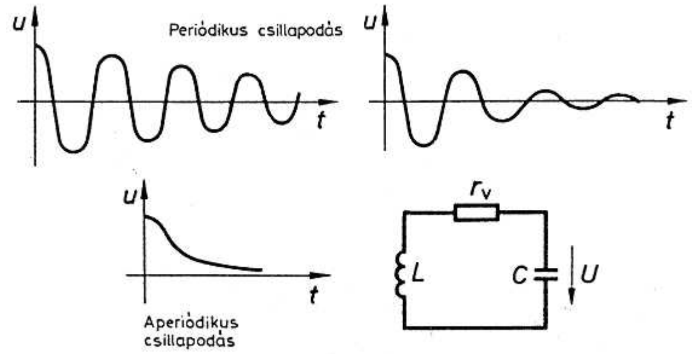
23. ábra

Az összekapcsolás pillanatától mindkét elemen ugyanakkora áram folyik, és ugyanakkora a feszültség is.

A t = 0 időpontban a kondenzátor U_0 feszültségre van feltöltve, áram nem folyik. A feszültség hatására a tekercsen egyre nagyobb áram indul meg, amely a kondenzátort fokozatosan kisüti. Amikor a kondenzátor teljesen kisült, a feszültség 0, ugyanekkor folyik a legnagyobb áram (a feltöltött kondenzátorban tárolt energia ekkor teljes egészében mágneses energiává alakul). Ennek az energiának a hatására a tekercsen az áram tovább folyik, és – az előzővel ellentétes polaritással – tölteni kezdi a kondenzátort. Amikor a kondenzátor $–U_0$ feszültségre töltődött, az áram ismét 0-ra csökken: a mágneses energia teljes egészében elektrosztatikus energiává alakult vissza. A folyamat ciklikusan ismétlődik, a feszültség és az áram lefolyását az ábra jobb oldalán láthatjuk. (Mindkét elemen az ismert 90 fokos fáziseltérés van a feszültség és az áram között.)

Tehát a „magára hagyott” LC körben szinuszos rezgés alakult ki, az ilyen elrendezést ezért nevezik ***rezgőkör****nek*

Ha a rezgőkör ideális (veszteség nélküli) kondenzátorból és tekercsből áll, a rezgés az idők végeztéig fennmarad. A valóságban a rezgőkör elemei veszteségesek, ezt gyakorlati számításokkor a rezgőkörbe helyezett ellenállással vesszük figyelembe. A veszteségek miatt a rezgés amplitúdója folyamatosan csökken (24. ábra).



24. ábra

Minél nagyobb a rezgőkör jósága (**Q**-ja), annál hosszabb idő alatt csillapodnak a rezgőkör rezgései. Csekély jóságú rezgőkörnél egy teljes rezgési periódus sem zajlik le (aperiodikus csillapítás).

Példa
Egy párhuzamos rezgőkörben L = 100μH, C = 220 pF, a veszteségeket R = 47 kΩ ellenállással vesszük figyelembe. Mekkora a rezgőkör rezonanciafrekvenciája, jósága, sávszélessége?
Megoldás: ($100\mu H = 100*10^{-6} H$, $220\ pF = 220*10^{-12} F$, $47\ k\Omega = 47*10^{3}\Omega$)

A rezonanciafrekvencia a Thomson-képlet szerint

$$f_0 = \frac{1}{2\Pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\Pi\sqrt{100\cdot10^{-6}\cdot220\cdot10^{-12}}} = \frac{1}{2\Pi\sqrt{2{,}2\cdot10^{-14}}} = \frac{1}{6{,}28\cdot1{,}48\cdot10^{-7}} = 1{,}073\cdot10^{6}\,Hz$$

(azaz 1,073 MHz).

A rezgőkör jósága

$$Q = \omega_0 CR = 2*\Pi*1{,}073*10^{6}*220*10^{-12}*47*10^{3} = 69{,}7$$

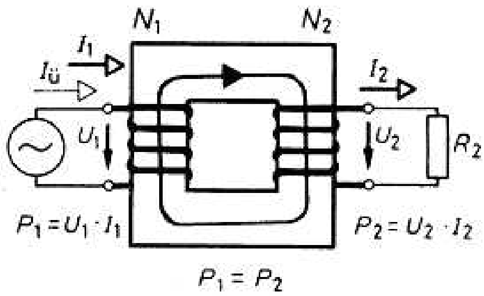
a sávszélesség pedig

$$B = \frac{f_0}{Q} = \frac{1{,}073\cdot10^{6}}{69{,}7} = 15{,}39\cdot10^{3}\,Hz = 15{,}39 kHz$$

3.5.5. Transzformátor

A 3.1.2. pontban említettük, hogy amíg a *csatolás* egymástól független tekercsek esetében általában nem kívánatos, egyes alkalmazásokban szándékosan hoznak létre csatolást tekercsek között. Ilyen alkalmazás a *transzformátor.*

A transzformátort általában zárt ferromágneses magon elhelyezett tekercsek formájában alakítják ki (25. ábra).



25. ábra

Az ún. ***primer*** tekercsre U_1 szinuszos feszültséget szolgáltató generátort kapcsolunk. Abban az esetben, ha a ***szekunder*** tekercsre még nem kapcsoljuk rá R_2 terhelést, a primer tekercsben induktív reaktanciájának megfelelő csekély $I_ü$ üresjárási áram indul meg. Ez az áram mágneses indukciót hoz létre. Az indukcióvonalak a szoros csatolást biztosító ferromágneses magon mindkét tekercsen áthaladnak, és mindkét tekercsben feszültséget indukálnak. A primer és a szekunder tekercs egy - egy menetében ugyanakkora feszültség indukálódik. Így U_1 primer feszültség és U_2 szekunder feszültség aránya a két tekercs N_1 ill. N_2 menetszámának arányával egyezik meg, melyet áttételnek neveznek és **a**-val jelölnek:

$$a = \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Ha a szekunder tekercsre R_2 terhelést kapcsoljuk, U_2 feszültség hatására azon I_2 áram indul meg, R_2 ellenálláson $P = U_2\ I_2$ teljesítmény disszipálódik. Ezt a teljesítményt a transzformátor az U_1

generátorból veszi fel olyan módon, hogy a primer tekercs árama I_1 értékűre nő. Ha a transzformátor ideális (veszteségmentes), akkor a primer oldalon felvett teljesítmény megegyezik a szekunder oldalon leadott teljesítménnyel:

$$U_1 I_1 = U_2 I_2$$

az egyenletet átrendezve

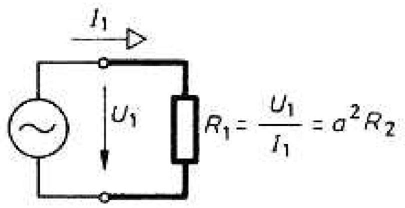
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{a}$$

adódik, azaz a primer és szekunder áram viszonya az áttétel reciprokával egyezik meg.

U_1 feszültség hatására a transzformátor primer tekercsén I_1 áram folyik. A két mennyiség hányadosa megadja azt az ellenállást, amellyel a transzformátor U_1 generátort terheli:

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{aU_2}{\frac{I_2}{a}} = \frac{U_2}{I_2} \cdot a^2 = R_2 \cdot a^2$$

A transzformátor primer tekercse tehát olyan ellenállásként viselkedik, amely a szekunder tekercsre kapcsolt ellenállás a^2-szerese. *A transzformátor a szekunder oldalára kapcsolt ellenállást az áttétel négyzetének arányában transzformálja a primer oldalra* (26. ábra).



26. ábra

<u>Valóságos (technikai) transzformátorok</u>

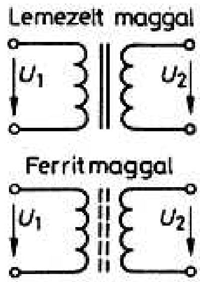
Az ideális transzformátor veszteségmentes, ezért primer és szekunder teljesítménye megegyezik. A valóságos transzformátor a tekercseknél már említett vasveszteség és tekercsveszteség miatt nagyobb teljesítményt vesz fel, mint amennyit lead. A leadott és felvett teljesítmény hányadosa a hatásfok, jele η:

$$\eta = \frac{P_{ki}}{P_{be}}$$

Kisebb teljesítményű transzformátorok szokásos hatásfoka η = 0,65…0,8; nagy teljesítményű (több száz kW-os) transzformátorok hatásfoka η = 0,97 fölött van.

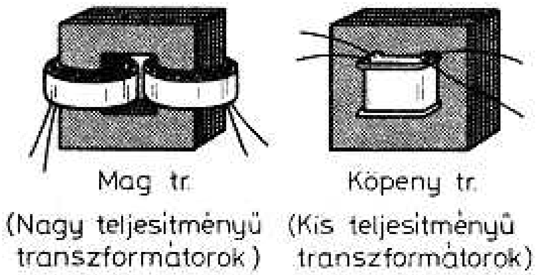
A veszteségek miatt a terhelt szekunder tekercs egy menetére eső feszültség is kisebb, mint a primer tekercs menetfeszültsége.

A transzformátor vasveszteségeinek a csökkentésére a vasmagot lemezelt vagy pormagból készítik, a mag anyagára a kapcsolási rajzjel is utal (27.ábra).



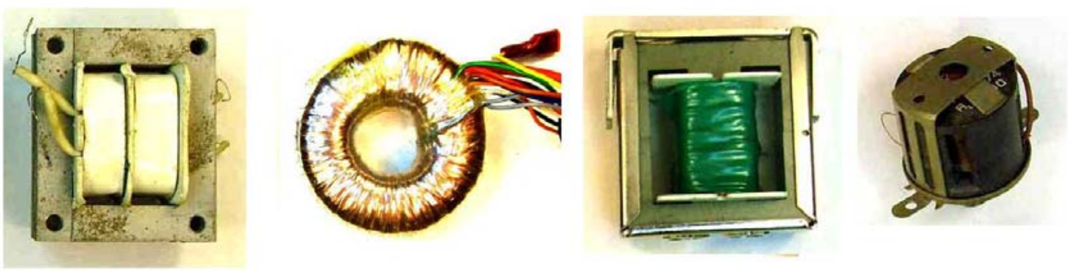
27. ábra

Lemezelt vasmagra alacsony frekvenciás (pl. hálózati) transzformátorokat készítenek (két kiviteli formát a 28. ábra mutat).



28. ábra

Magasabb frekvenciákon a lemezelt mag veszteségei megnőnek, itt porvas magot alkalmaznak. A zárt körgyűrű (toroid) magokra nagyobb teljesítményű transzformátorokat is készítenek, ez a mag létesíti a legcsekélyebb szórt mágneses teret. Szintén készítenek kisebb teljesítményű transzformátort ferrit E magra vagy fazékmagra is (29. ábra balról jobbra: lemezelt magú transzformátor, toroid transzformátor, ferrit E magos transzformátor, fazékmagra készült transzformátor.)



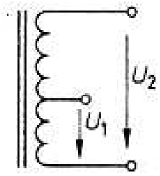
29.ábra

A transzformátor vasmagának *keresztmetszete* az átvinni kívánt teljesítménytől függ (nagyobb teljesítményhez nagyobb vaskeresztmetszet tartozik).

Amennyiben több, különböző szekunder feszültségre van szükség, a transzformátort több szekunder tekerccsel készítik el. Ilyen esetben a primer teljesítmény a szekunder tekercsekről felvett teljesítmények összegével egyezik meg.

Minél nagyobb a transzformátor teljesítménye, annál nagyobb keresztmetszetű vasmagra készítik.

Megjegyzés: A transzformátor primer és szekunder tekercse kialakítható egyetlen, leágazásos tekercs formájában is (30. ábra). Ezt az elrendezést *autotranszformátor*nak nevezik.



30. ábra

Példa

Transzformátorunk 230V-os primer tekercsének menetszáma 1035. Veszteségmentes transzformátort feltételezve mekkora legyen a szekunder menetszám, ha 12V 55W-os gépkocsi izzót kívánunk a szekunder tekercsre kapcsolni? Az izzó bekapcsolásakor mekkora primer áram folyik?

Megoldás:

Először is tisztázzuk, hogy a 230V-os primer feszültség a feszültség effektív értékét jelenti. A működtetendő izzó 12V egyenfeszültségre készült. Az izzó működése az áram hőhatásán alapszik, tehát váltakozó feszültségről történő üzemeltetéskor 12 V *effektív értékű* feszültség fog azonos izzítási teljesítményt nyújtani. Így a transzformátor szekunder tekercsét 12V effektív értékre kell elkészíteni.

A 230V-os primer menetszám N_1 = 1035, tehát a voltonkénti (1 V-ra jutó) menetszám 1035/230=4,5. Ha a transzformátor veszteségmentes, a szekunder tekercsnél is ugyanekkora a voltonkénti menetszám, tehát 12V-os feszültséghez 12∗4,5 = **54 menet** tartozik.

A szekunder oldali teljesítmény P_2 = 55W, veszteségmentes transzformátornál ugyanekkora a P_1 primer teljesítmény is, a primer áram pedig

$$I_1 = \frac{P_1}{U_1} = \frac{55}{230} = 0{,}239A = 239mA$$