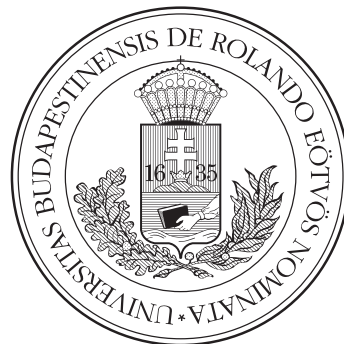


EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Vadas Norbert
ROBOTKAROK PROBLÉMÁJA

matematika BSc szakdolgozat
alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:
Szeghy Dávid
Geometriai Tanszék



Budapest, 2013

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Szeghy Dávidnak, hogy megismertette velem ezt a remek témakört, hogy segített megoldani a felmerülő problémákat, valamint hogy figyelemmel kísérte és hasznos tanácsaival segítette a dolgozat megírását.

Köszönettel tartozom még minden gimnáziumi és egyetemi tanáromnak, akik megszerettették velem a matematikát, és bevezettek ennek a csodálatos tudománynak a rejtelmeibe.

Végül, de nem utolsósorban köszönöm menyasszonyomnak, Halmai Boglárkának a türelmét, a lelkesítését és minden támogatását, amelyet az elmúlt időszakban nyújtott, beleértve a nyelvtani és formai hibák javítását.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
1.1. Felhasznált ismeretek és jelölések	2
2. A robotgeometria alapjai	3
2.1. Példák robotkarokra	4
2.1.1. Az antropomorf robotkar (RRR)	4
2.1.2. A gömbi robotkar (RRP)	5
2.1.3. A hengeres robotkar (RPP)	5
2.2. Direkt és inverz kinematika	6
2.2.1. A Denavit-Hartenberg konvenció	6
2.2.2. A direkt kinematikai feladat	8
2.2.3. Az inverz kinematikai feladat	10
3. Sebességkinematika	11
3.1. Ferdén szimmetrikus mátrixok és a szögsebesség	12
3.1.1. A ferdén szimmetrikus mátrixok	13
3.1.2. A forgatási mátrixok deriválása	15
3.2. Az eredő lineáris és szögsebesség	16
3.2.1. Szögsebességek összege	17
3.2.2. Egy pont lineáris sebessége	19
3.3. A Jacobi-mátrix kiszámítása	20
3.3.1. A kéz szögsebessége	21
3.3.2. A kéz lineáris sebessége	22
3.3.3. A Jacobi-mátrix egyesítése	26
3.4. Az analitikus Jacobi-mátrix	27
3.5. Szingularitások meghatározása	28
3.5.1. Szingularitások szétbontása	30
3.6. Az inverz sebességkinematikai feladat	32
4. Összefoglalás	35

1. Bevezetés

Mindenki hallott már robotokról, és mindenkiben él egy elképzelés arról, hogy ez a szó mit is takar valójában. Egyesek emberi kinézetű, intelligenciával rendelkező mechanikus lényeket neveznek így, mások egyszerű, automatizált eszközökre használják ezt a kifejezést. Akárhogyan is gondolunk rájuk, van bennük valami különleges, ami magával ragadja az ember fantáziáját. Nem csoda, hogy megannyi könyv és film született már ebben a témában.

Ebben a dolgozatban ipari robotokról, más néven robotkarokról lesz szó. Ezek az eszközök szegmensek és ízületek láncolatából állnak, és típusuktól függően többékevésbé az emberi karra hasonlítanak. Az itt említett fogalmakat a következő fejezetben fogjuk pontosan definiálni, valamint majd néhány példát is láthatunk a legelterjedtebb robotkar-konfigurációkra.

Az általános szemléletnek megfelelően ezek a robotok kiválóan alkalmasak a monoton, ismétlődő munkafolyamatokban az emberi tevékenység kiváltására. A tömeggyártásban elengedhetetlen a használatuk, mivel képesek nagy mennyiségű, közel azonos minőségű áru gyors, önálló előállítására. További előnyeik még az alacsonyabb előállítási költségek és a nagyobb precizitás. A robotkarok programozása azonban nem egy egyszerű feladat. Egy sor különféle, természetes módon felbukkanó problémára kell gyorsan kiszámítható megoldást adnunk. A továbbiakban néhány ilyen feladatot fogunk alaposabban is megvizsgálni.

A robotgeometriának vannak más alkalmazásai is. Az elmúlt évek technológiai fejlődése lehetővé tette, hogy egyre élethűbb számítógépes animációkat készítsünk, akár filmekhez, akár videojátékokhoz. Ehhez az élethűséghez a pusztán látvány azonban nem elég: az is fontos, hogy a karakterek mozgása természetes, emberi legyen. Robotkarok használatával egyszerűen tudunk végtagokat matematikailag ábrázolni. Ezáltal az itt elért eredmények felhasználhatóvá válnak a digitális modellezésben is. Ennek megfelelően az előbb említett probléma megoldásában többek közt az inverz sebességkinematika fog segítséget nyújtani nekünk.

1.1. Felhasznált ismeretek és jelölések

A továbbiakban elsősorban geometriai és lineáris algebrai ismeretekre lesz szükségünk, melyek megtalálhatóak a Hajós [2], illetve a Freud [1] könyvekben. Ezen eredményeket nem fogjuk részletezni, hanem már ismertnek tekintjük őket.

A dolgozat nagymértékben támaszkodik a Spong, Hutchinson, és Vidyasagar [3] könyv ide vonatkozó fejezeteire, mind tartalmilag, mind a felhasznált képek, illetve jelölések tekintetében. Ennek megfelelően a mátrixokat nagybetűvel, a vektorokat és skalármennyiségeket kisbetűvel jelöljük, a koordináta-tengelyeket pedig gyakran azonosítjuk a hozzájuk tartozó bázisvektorokkal. Ezenfelül az indexek használatát illetően a következőképpen járunk el. A felső index mindig a referencia koordináta-rendszert jelöli, vagyis azt a rendszert, amelyben a mennyiséget felírtuk. Az alsó index azt a rendszert jelöli, amelynek az adott mennyiségét kifejeztük a referencia-rendszer szerint. Tehát az R_j^i forgatási mátrix a j rendszer elfordulását adja meg az i rendszerhez képest, az o_j^i vektor pedig a j rendszer origóját adja meg az i rendszer koordinátaival. Az ω szögsebesség-vektorok esetében az alsó két index azt jelöli, hogy mely két rendszer közötti elfordulás szögsebességét írjuk le a referencia-rendszerben.

Ezen kívül deriválás alatt mindig a t időparaméter szerinti deriválást értjük, és a változó fölé írt ponttal vagy $\frac{d}{dt}$ -vel jelöljük. Továbbá az egyszerűség kedvéért gyakran el fogunk hagyni bizonyos indexeket és változókat mindaddig, amíg ebből nem származik félreértés. Legtöbbször ez a t időparamétert és a bázisrendszerre vonatkozó 0 indexet érinti.

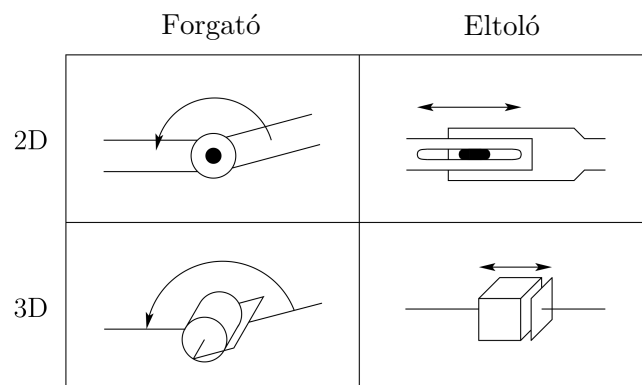
2. A robotgeometria alapjai

Ahhoz, hogy robotkarokkal tudjunk dolgozni, szükségünk lesz egy matematikai modellre, amely segítségével könnyen leírhatóvá és kezelhetővé válnak a felmerülő problémák. Ebben a fejezetben ezt a modellt fogjuk felépíteni. Először is definiálnunk kell, mi is az a robot.

2.0.1. Definíció (A Robot Institute of America szerint). A robot egy újraprogramozható, többfunkciós manipulátor anyagok, eszközök, részegységek vagy speciális műszerek változókkal programozott mozdulatsor segítségével való mozgására tervezve, különféle feladatok elvégzése érdekében.

Ebben a definícióban a kulcsfogalom az újraprogramozhatóság. A számítógépes vezérlés adja a robotok használhatóságát és alkalmazkodóképességét. Léteznek ugyanis úgynevezett teleoperátorok, melyek folyamatos emberi irányítást igényelnek. Ezeket nem soroljuk a robotok közé.

Felépítését tekintve a manipulátor merev testek, szegmensek sorozata, amelyek ízületekkel vannak összekötve. Ezek egy kinematikai láncot alkotnak, amelynek végén valamilyen szerszám található, amelyet kéznek nevezünk. A robotkar munkatere azon térbeli pontokból áll, amelyekbe a kéz eljuttatható. A kinematikai láncot nyílt-nak nevezzük, ha a két végét csak egy szegmens-sorozat köti össze; ellenkező esetben zárt láncról beszélünk. Az ízületek típusuk szerint lehetnek forgatók (revolute, R) vagy eltolók (prismatic, P). Ezeket elemi, egy szabadságfokú ízületeknek hívjuk.



2.1. ábra. Forgató és eltoló ízületek kettő és három dimenzióban

Mivel bármely több szabadságfokú ízület előáll elemi ízületekből, így nem jelent megkötést csak ezekkel foglalkozni.

A nyílt láncú robotkarokat a ízületek típusának felsorolásával adjuk meg, a bázistól a kéz felé haladva, pl.: RRP. A forgató ízületek egy tengely körüli forgatást, az eltoló ízületek egy tengely menti eltolást valósítanak meg. Ezt a tengelyt az adott ízület hatástengelyének nevezzük. Könnyen látható, hogy minden ízület állapota megadható egyetlen paraméterrel: az elfordulás szögével vagy az eltolás mértékével. Ezeknek a $q = (q_1, \dots, q_n)$ vektorát a manipulátor egy konfigurációjának nevezzük. A paraméterek, vagyis az ízületek számát a robotkar szabadságfokának hívjuk.

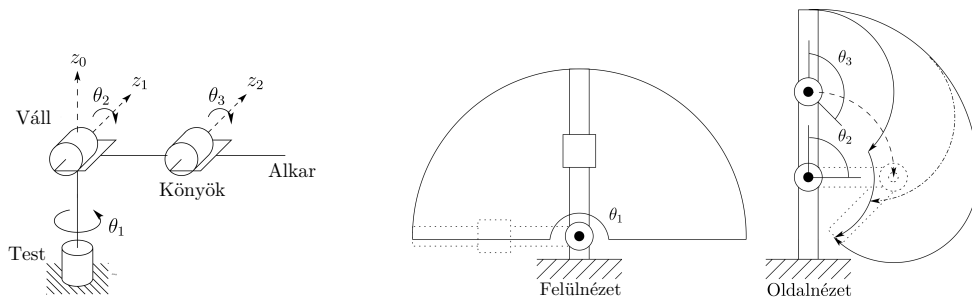
A paraméterekkel kapcsolatban kétféle probléma fogalmazható meg, a direkt és az inverz kinematikai probléma. Az előbbinél adottak az ízületi paraméterek, és a cél a kéz helyzetének a meghatározása, az utóbbinál pedig a kéz helyzete ismert, és keressük az azt megvalósító paramétereket. A következőkben ezekkel a problémákkal fogunk foglalkozni, de előbb még lássunk néhány példát a legelterjedtebb robotkarokra.

2.1. Példák robotkarokra

Habár számtalan módon lehetséges forgató és eltoló ízületek segítségével különféle kinematikai láncokat létrehozni, a gyakorlatban ezek közül csak néhány speciális konfiguráció használata az elterjedt. Most ezek közül mutatunk be hármat.

2.1.1. Az antropomorf robotkar (RRR)

Az antropomorf, más néven humanoid robotkar három forgató ízületből áll. Ezek közül a második és a harmadik ízület hatástengelyei párhuzamosak egymással, és merőlegesek az első ízület hatástengelyére. Nevét az emberi karhoz hasonló felépítéséről kapták, ennek megfelelően az ízületek nevei rendre test, váll illetve könyök.

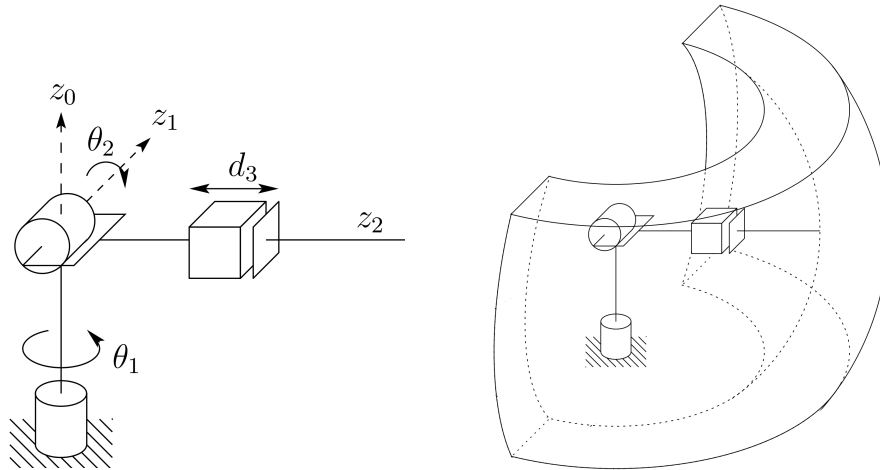


2.2. ábra. Az antropomorf robotkar felépítése és munkatere

Ez az egyik leggyakrabban használt robotkar, mivel szerkezetéből adódóan kiválóan alkalmas az emberi munkavégzés kiváltására. Munkatere gömb alakú, ezen belül viszonylag nagy mozgási szabadsággal rendelkezik.

2.1.2. A gömbi robotkar (RRP)

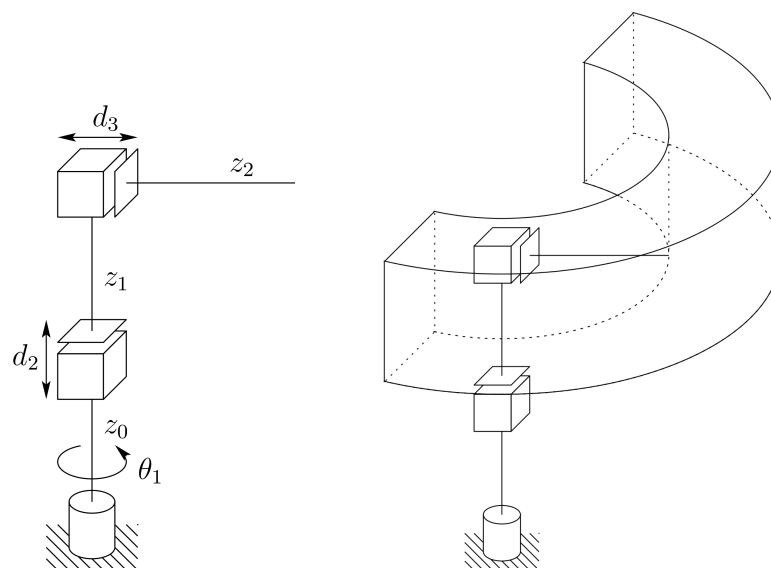
Az antropomorf manipulátor könyökét eltoló ízületre cserélve kapjuk a gömbi robotkart. Az elnevezés abból ered, hogy ekkor a három ízületi paraméter megegyezik a kéz egy olyan rendszer szerinti gömbi koordinátaival, melynek origója a hatástengelyek metszéspontjában van.



2.3. ábra. A gömbi robotkar felépítése és munkatere

2.1.3. A hengeres robotkar (RPP)

A hengeres robotkar első ízülete forgató, a második és a harmadik pedig eltoló. Ahogyan a neve is mutatja, az ízületi paraméterek megegyeznek a kéz hengerkoordinátaival, amennyiben az origót a manipulátor alapjának középebe helyezzük.



2.4. ábra. A hengeres robotkar felépítése és munkatere

2.2. Direkt és inverz kinematika

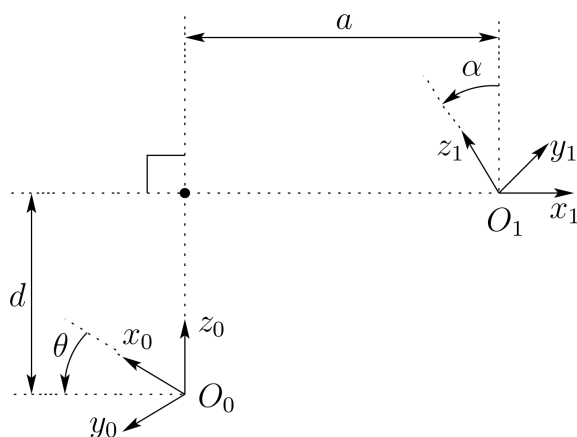
A direkt kinematikai feladat megoldásához szükségünk lesz egy jól meghatározott koordináta-rendszerre, amelyben meg tudjuk adni a kéz koordinátáit az ízületi paraméterek függvényében. Ezt úgy érjük el, hogy minden egyes szegmenshez mereven rögzítünk egy-egy koordináta-rendszert, azután pedig koordináta-transzformációkat hajtunk végre.

Az i -edik szegmens koordináta-rendszerét jelölje (o_i, x_i, y_i, z_i) . Ebben a koordináta-rendszerben az i -edik szegmens pontjainak a koordinátái állandóak. A nulladik rendszert bázisrendszernek hívjuk, az n -ediket pedig a kéz koordináta-rendszerének.

2.2.1. A Denavit-Hartenberg konvenció

Olyan koordináta-rendszereket keresünk, amelyek kielégítik az alábbi feltételeket:

- (a) A z_i tengely egybeesik az $i + 1$ -edik ízület hatástengelyével.
- (b) Az x_i tengely merőlegesen metszi a z_{i-1} tengelyt.



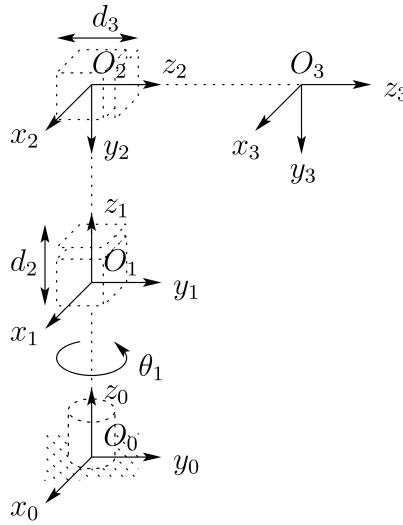
2.5. ábra. A Denavit-Hartenberg konvenció

2.2.1. Állítás. *Mindig lehetséges így megválasztani a koordináta-rendszereket.*

Bizonyítás. A bázis koordináta-rendszerben csak a z_0 tengely van egyértelműen meghatározva, az első ízület hatástengelyeként. Az o_0 origó tetszőlegesen megválasztható ezen a tengelyen, illetve az x_0 tengely is tetszőleges, o_0 ponton átmenő, z_0 -ra merőleges egyenes lehet. Ezek rögzítése után az y_0 tengely már egyértelműen meghatározott lesz.

Tegyük fel, hogy az első $i - 1$ koordináta-rendszert már meghatároztuk a feltételeknek megfelelően. Ekkor (a) szerint a z_i tengely adott. Tudjuk továbbá, hogy az x_i

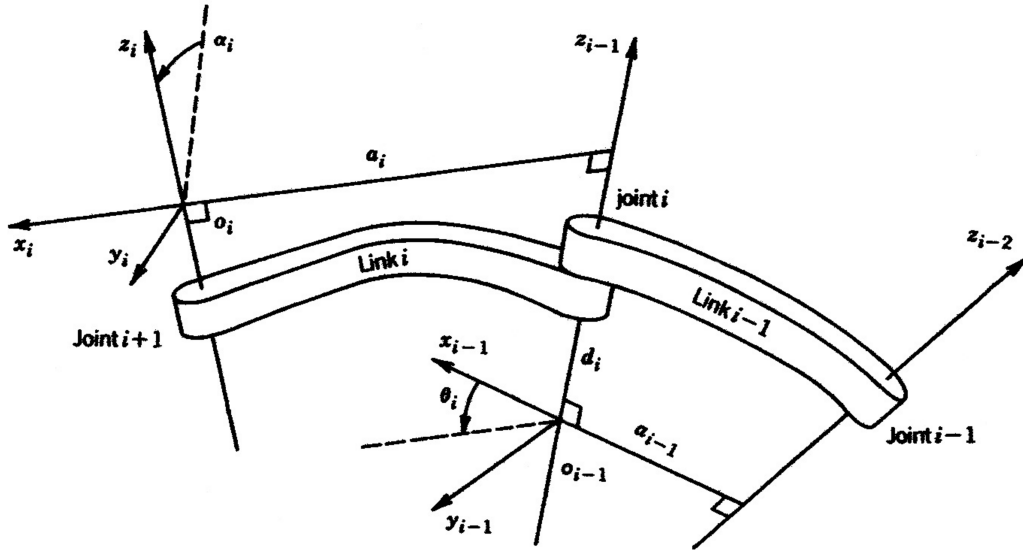
tengely merőlegesen metszi z_i -t, valamint (b) alapján z_{i-1} -t is. Ebből kapjuk, hogy x_i a z_{i-1} és z_i egyenesek normál transzverzálisa, ha z_{i-1} és z_i kitérő nem párhuzamos egyenesek, vagy a két egyenes metszéspontjában állított merőleges, ha z_{i-1} és z_i metsző, de nem egybeeső egyenesek. Abban az esetben, amikor z_{i-1} és z_i párhuzamosak vagy egybeesnek, az x_i tengely tetszőleges rájuk merőleges egyenes lehet. Ilyenkor célszerű azt választani, amellyel a legegyszerűbb számolni. Ha x_i -t és z_i -t már meghatároztuk, akkor o_i -t a tengelyek metszeteiként, y_i -t pedig a jobb-rendszer harmadik tagjaként kapjuk. \square



2.6. ábra. A hengeres manipulátor koordináta-rendszerei

Tudjuk, hogy minden térbeli koordináta-rendszerek közötti irányítástartó transzformáció megadható hat adattal. Az eltolás leírható az eltolásvektor három koordinátájával, a forgatást pedig reprezentálhatjuk három Euler-szöggel vagy egy tisztán képzetes egységkvaternióval, amely szintén három adat. A pontos megadásra nem lesz szükségünk, ezért nem is részletezzük, de megtalálhatóak például a [3] jegyzetben. Most megmutatjuk, hogy a Denavit-Hartenberg konvenció használatával négy paraméter is elegendő. Ennek az az oka, hogy ebben az esetben speciális helyzetű koordináta-rendszerek között hajtjuk végre a transzformációkat.

Hozzunk létre egy új, köztes koordináta-rendszert. Legyen $o'_i = x_i \cap z_{i-1}$, $x'_i = x_i$ és $z'_i = z_{i-1}$. Ekkor már y'_i is adott. Legyen továbbá $d_i = |o'_i - o_{i-1}|$ illetve $a_i = |o_i - o'_i|$ az origók távolságai, valamint $\alpha_i = z'_i z_{i-1} \angle$ és $\theta_i = x_{i-1} x'_i \angle$ a tengelyek által bezárt szögek. Mivel $o'_i - o_{i-1} = d_i z_{i-1}$ és $o_i - o'_i = a_i x'_i$, így a $(d_i, a_i, \theta_i, \alpha_i)$ paraméterekkel leírható az (o_i, x_i, y_i, z_i) koordináta-rendszer helyzete az $(o_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ koordináta-rendszerben. Tehát ebben a speciális helyzetben a két rendszer viszonyának megadásához a szokásos hat paraméter helyett négy is elegendő. Most belátjuk, hogy ebből a négy adatból mindig csak egy fog változni az ízület mozgása során. Ezt nevezzük az adott ízület paraméterének.



2.7. ábra. Ízületi paraméterek és koordináta-rendszerek

2.2.2. Állítás. Minden ízületre a négy paraméter $(d_i, a_i, \theta_i, \alpha_i)$ közül három konstans, és csak θ_i vagy d_i változhat attól függően, hogy az i -edik ízület forgató vagy eltoló.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy az a_i és α_i paraméterek értékei nem változnak az ízület mozgásakor, mert azok csak a z_i és z_{i-1} tengelyek helyzetétől, azaz csak a szegmens alaki tulajdonságaitól függenek. Forgató ízület esetében d_i is állandó marad, mert nem történik eltolás, és így nem változik a tengelyek távolsága. Ekkor viszont θ_i pont az i -edik szegmens z_{i-1} körüli elfordulását adja meg, azaz a forgató ízületek paramétere θ_i lesz. Hasonlóan, amikor az i -edik ízület eltoló, akkor θ_i lesz konstans, mert nem megy végbe forgatás, és így a tengelyek szöge állandó marad. Ebben az esetben d_i fog változni, mégpedig az i -edik és az $i - 1$ -edik ízület távolságának megfelelően, tehát az eltoló ízületek paramétere d_i . \square

2.2.2. A direkt kinematikai feladat

Most vizsgáljuk meg, hogyan adható meg egy pont koordinátája egy másik ízület koordináta-rendszerében. Ehhez használjuk a pontok négydimenziós homogén koordinátáit, mivel így a lineáris transzformációk is könnyen kezelhetőek. Ekkor a direkt kinematikai feladat megoldásának számító transzformációt

$$T_n^0 = \begin{bmatrix} R_n^0 & o_n^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

alakban keressük, ahol $R_n^0 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ a kéz rendszerének elfordulása a bázisrendszerhez képest, $o_n^0 \in \mathbb{R}^3$ pedig a bázis origójából a kéz origójába mutató vektor.

Tekintsünk egy $(u_i, v_i, w_i, 1)^T$ pontot az (o_i, x_i, y_i, z_i) koordináta-rendszerben. Ennek a pontnak az (o'_i, x'_i, y'_i, z'_i) rendszer szerinti koordinátáit úgy kapjuk, hogy először eltoljuk az $x_i = x'_i$ tengely mentén a_i -vel, majd ugyanezen tengely mentén elforgatjuk α_i szöggel. Ezeknek a transzformációknak a szorzata a

$$T_i^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

mátrix. A köztes koordináta-rendszerből az $(o_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ rendszerbe való áttéréshez végre kell még hajtanunk egy d_i -vel való eltolást és egy θ_i szögű forgatást a $z'_i = z_{i-1}$ tengely mentén. Ezt a transzformációt a

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

mátrix adja meg. Ezek alapján az (o_i, x_i, y_i, z_i) rendszerből az $(o_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ rendszerbe való áttérés mátrixa

$$\begin{aligned} T_i^{i-1} &= T_i^{i-1} T_i^{i'} = \begin{bmatrix} R_i^{i-1} & o_i^{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

alakú. Tehát az $(u_i, v_i, w_i, 1)^T$ pont koordinátáit az $(o_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ rendszerben az

$$\begin{bmatrix} u_{i-1} \\ v_{i-1} \\ w_{i-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

összefüggés adja meg.

Legyenek a robot kezének koordinátái a hozzá tartozó (o_n, x_n, y_n, z_n) rendszerben $(u_n, v_n, w_n, 1)^T$. Ekkor az előzőek alapján a direkt kinematikai feladat megoldása, azaz a kéz koordinátái az (o_0, x_0, y_0, z_0) rendszerben

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ 1 \end{bmatrix} = T_1^0 T_2^1 \cdots T_n^{n-1} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

ahol $T_1^0, T_2^1, \dots, T_n^{n-1}$ az egyes ízületekhez tartozó, a fenti alakban előálló áttérési mátrixok. A $T_n^0 = T_1^0 T_2^1 \cdots T_n^{n-1}$ mátrixból a kéz rendszerének elfordulása is könnyen leolvasható a fent említettek alapján.

2.2.3. Az inverz kinematikai feladat

A kéz adott helyzetét megvalósító ízületi paraméterek általános képlettel való meghatározása sokkal nehezebb a direkt feladat megoldásánál, mivel azt egy nemlineáris kifejezés adja meg. Habár konkrét robotkarok esetében geometriai okoskodással viszonylag könnyen kiszámíthatóak ezek a paraméterek, általában több lehetséges megoldás is tartozik a kéz egy kívánt helyzetéhez, és gyakran nem egyértelmű, hogy melyiket érdemes választani.

Ez a probléma azonban sokkal elegánsabban megoldható a sebességkinematika és az útkeresés segítségével, amely feladatokat egy robotkar programozásához egyébként is meg kell oldanunk. Ekkor ugyanis nem csupán egy kívánt pozíciót és orientációt szabunk meg a kéznek, hanem egy teljes útvonalat, és annak minden pontjára adott lineáris és szögsebességeket is előírunk. Ezáltal egy egyértelmű megoldást kapunk a kéz tetszőleges helyzetbe történő elmozgatására.

3. Sebességkinematika

Az előzőekben azt vizsgáltuk, hogy milyen kapcsolat van az ízületi paraméterek és a robotkar pozíciója között. Ennek segítségével megtudhatjuk, hogy adott paraméterek esetén hol van éppen a kar, vagy hogy az ízületek milyen állásánál kerül a kar a kívánt pozícióba. Ez azonban önmagában még nem elég ahhoz, hogy egy robotot vezérelni tudjunk. Nem mindegy ugyanis, hogy milyen sebességgel kerül a robot a kívánt helyzetbe. Ha túl gyorsan mozog, kárt tehet a környezetében vagy akár saját magában is. Ha pedig túl lassan, akkor minden mozgás szükségtelenül sok időt vesz igénybe. A pontos sebességekre akkor is szükségük van, amikor emberi mozgásokat szeretnénk élethűen utánozni. Ilyenkor fontos, hogy a kar mozgása élet-szerű, folytonos sebességgel történjen. Ahogy a bevezetőben is szóba került, ez segít abban, hogy az animált karakterek mozgása valóságos legyen.

A korábbiakhoz hasonlóan most is kétféle problémát különböztetünk meg: a direkt és az inverz sebességkinematikai feladatot. Az előbbinél adottak az ízületek sebességei, azaz a paraméterek deriváltjai, és keressük a kar eredő sebességét. Az utóbbinál adott sebességgel szeretnénk mozgatni a robotkart, és keressük az ezt megvalósító paraméter-deriváltakat. A direkt kinematikai egyenletek meghatároznak egy leképezést az ízületi paraméterek és a kar pozíciója között. A sebességkinematikai problémák megoldásához szükségünk lesz ennek a deriváltjára, azaz a Jacobi-mátrixra. Ez az egyik legfontosabb mennyiség a robotgeometriában, szinte minden területen felmerül: az útvonalkeresés és -követésben, a szinguláris pozíciók meghatározásában, a mozgás dinamikai egyenleteinek levezetésében, illetve a robotkarral ható erő és nyomaték kiszámításában.

Mielőtt rátérnénk ezekre a problémákra, és kiszámítanánk a Jacobi-mátrixot, tekintsük meg, hogyan jellemezhető egy test lineáris- illetve szögsebessége, valamint hogyan tudjuk ezeket könnyedén kiszámítani. Ehhez megismerkedünk a ferdén szimmetrikus mátrixokkal, és megvizsgáljuk a forgatási mátrixokhoz és a szögsebességhez való viszonyukat. Ezek ismeretében a Jacobi-mátrix már könnyen meghatározható.

3.1. Ferdén szimmetrikus mátrixok és a szögsebesség

Tekintsünk egy olyan esetet, amikor egy merev test egy rögzített tengely körül forog. Ekkor a test egyes pontjai olyan körpályákon fognak mozogni, amelyek középpontjai a tengelyre esnek. A mozgás során adott idő alatt minden egyes pont ugyanakkora szöggel fordul el a pálya középpontja körül. A t idő alatti szögelfordulást jelölje $\theta(t)$. Legyen k egy forgástengellyel párhuzamos egységvektor. Ekkor a szögsebesség szabad vektora

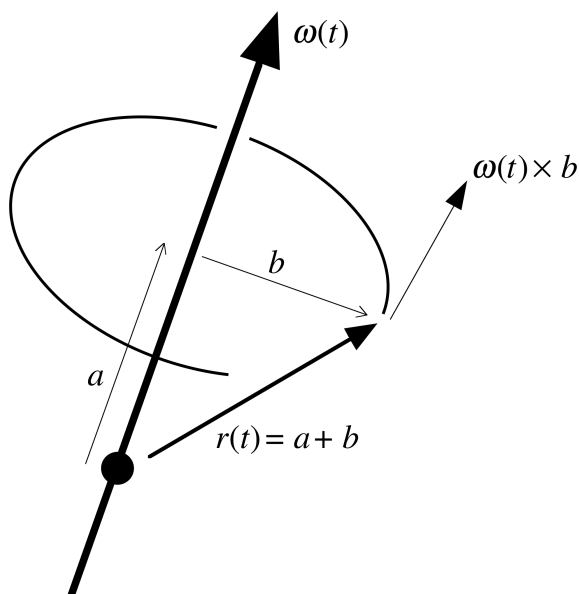
$$\omega = \dot{\theta}k \quad (3.1)$$

ahol $\dot{\theta}$ az idő szerinti deriváltja θ -nak. Itt a szabad vektor azt jelenti, hogy ω egy irányított szakasz, azaz csak a nagysága és az iránya adott, és így tetszőleges rendszer megfelelő helyvektorával reprezentálható. A képlet azt mutatja, hogy a szögsebesség egy olyan, a forgás tengelyébe eső vektor, melynek nagysága az elfordulás megváltozásával arányos, az iránya pedig a forgásirányból a jobbkéz-szabály alapján kapható.

Tudjuk, hogy adott szögsebesség mellett a test egy pontjának lineáris sebessége

$$v = \omega \times r \quad (3.2)$$

ahol r az origóból a pontba mutató vektor.



3.1. ábra. A szögsebesség és a lineáris sebesség

Az előzőekhez hasonlóan a testek helyzetét most is a hozzájuk rendelt koordináta-rendszer helyzetével fogjuk leírni. Mivel a test minden pontjában ugyanakkora a szögsebesség, és a testhez mereven rögzített koordináta-rendszer minden ponthoz

képest fix, ezért a szögsebesség magának a koordináta-rendszernek a jellemzője.

A szögsebesség további vizsgálatához szükségünk lesz a ferdén szimmetrikus mátrixokra és azok tulajdonságaira. Ezek segítségével egyszerűen ki tudjuk számítani forgatási mátrixok deriváltjait, valamint meg tudjuk határozni a hozzájuk tartozó szögsebességet. Ezáltal egy könnyen használható, minden dimenzióban általánosan alkalmazható modellhez jutunk.

3.1.1. A ferdén szimmetrikus mátrixok

Ahhoz, hogy meghatározzuk a koordináta-rendszerek egymáshoz viszonyított sebességei közötti transzformációkat, ki kell tudnunk számítani egy forgatási mátrix deriváltját. Ferdén szimmetrikus mátrixok használatával ezen számítások jelentősen leegyszerűsíthetők.

3.1.1. Definíció. Egy $n \times n$ -es S mátrixot pontosan akkor nevezünk ferdén szimmetrikusnak, ha

$$S^T + S = 0 \quad (3.3)$$

ahol 0 a nullmátrixot jelöli.

Az ilyen mátrixok halmazát $\mathfrak{so}(n)$ -nel jelöljük. Ez a jelölés onnan származik, hogy az $SO(n)$ csoport Lie-algebrája $\mathfrak{so}(n)$, amelyet épp a ferdén szimmetrikus mátrixok alkotnak. A definícióból következik, hogy minden $S \in \mathfrak{so}(n)$ -re

$$s_{ij} = \begin{cases} -s_{ji} & \text{ha } i \neq j \\ 0 & \text{ha } i = j \end{cases} \quad (3.4)$$

Tehát minden 3×3 -as ferdén szimmetrikus mátrixnak csak 3 független eleme van, és így a következő alakban írható fel

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Vegyünk egy $a = (a_x, a_y, a_z)^T$ vektort. Ekkor hozzárendelhető egy

$$S(a) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

mátrix, melyet az a által generált ferdén szimmetrikus mátrixnak nevezünk.

3.1.1. Példa. Jelölje a szokott módon i, j és k a koordináta-rendszer három bázisvektorát. Nézzük meg az ezek által generált ferdén szimmetrikus mátrixokat, mivel

ezeknek a későbbiekben még hasznát fogjuk venni. Az előzőek szerint $S(i), S(j)$ és $S(k)$

$$S(i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S(j) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S(k) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

alakúak.

Most vizsgáljuk meg a ferdén szimmetrikus mátrixok néhány olyan tulajdonságát, amelyekre a továbbiakban gyakran fogunk hivatkozni, és amelyekre szükségünk lesz például a Jacobi-mátrix meghatározásánál is.

1. Az S operátor lineáris, azaz

$$S(\alpha a + \beta b) = \alpha S(a) + \beta S(b) \quad (3.8)$$

bármely $a, b \in \mathbb{R}^3$ vektorra és tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalárra.

2. Minden $a, p \in \mathbb{R}^3$ vektorra

$$S(a)p = a \times p \quad (3.9)$$

Ez az összefüggés a két oldal kiszámításával egyszerűen ellenőrizhető.

3. Minden $R \in SO(3)$ forgatásra és $a \in \mathbb{R}^3$ vektorra

$$RS(a)R^T = S(Ra) \quad (3.10)$$

Ezen állítás bizonyításához szükségünk van a forgatómátrixok egyik tulajdonságára, mely szerint minden $R \in SO(3)$ forgatásra és $a, b \in \mathbb{R}^3$ vektorra

$$R(a \times b) = Ra \times Rb \quad (3.11)$$

azaz a forgatás disztributív a vektorszorzásra nézve. Ez az adott műveletek geometriai jelentéséből következik. Tetszőleges $b \in \mathbb{R}^3$ vektorra a (3.9) egyenletből

$$RS(a)R^T b = R(a \times R^T b) \quad (3.12)$$

adódik. Erre a (3.11) összefüggést alkalmazva, és a szorzást elvégezve

$$R(a \times R^T b) = (Ra) \times (RR^T b) = (Ra) \times b \quad (3.13)$$

jön ki. Ekkor (3.9) ismételt alkalmazásával

$$(Ra) \times b = S(Ra)b \quad (3.14)$$

kapható, azaz beláttuk, hogy

$$RS(a)R^Tb = S(Ra)b \quad (3.15)$$

minden b vektorra.

3.1.2. A forgatási mátrixok deriválása

Tegyük fel, hogy az R forgatási mátrix a θ változó függvénye, azaz $R = R(\theta) \in SO(3)$ minden $\theta \in \mathbb{R}$ -re. Ilyen például, amikor egy rögzített tengely körül forgatunk θ szöggel, de természetesen az alábbiak ennél általánosabb esetben is érvényesek. Mivel R minden θ paraméterre ortogonális, ezért

$$R(\theta)R(\theta)^T = I \quad (3.16)$$

adódik. Mindkét oldalt θ szerint deriválva, a szorzat-szabályt felhasználva, és figyelembe véve, hogy a konstans mátrix deriváltja 0, azt kapjuk, hogy

$$\frac{dR}{d\theta}R(\theta)^T + R(\theta)\frac{dR^T}{d\theta} = 0 \quad (3.17)$$

Vezessük be az első tagra az

$$S := \frac{dR}{d\theta}R(\theta)^T \quad (3.18)$$

jelölést. Mivel S transzponáltja

$$S^T = \left(\frac{dR}{d\theta}R(\theta)^T \right)^T = R(\theta)\frac{dR^T}{d\theta} \quad (3.19)$$

Ezért a (3.17) egyenlet

$$S + S^T = 0 \quad (3.20)$$

alakra hozható, vagyis az S mátrix definíció alapján ferdén szimmetrikus. Ha a (3.18) egyenletet R -rel jobbról megszorozzuk, és felhasználjuk, hogy a jobb oldalon $R^T R = I$ teljesül, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{dR}{d\theta} = SR(\theta) \quad (3.21)$$

ami a forgatási mátrixok deriválási szabálya. Ezt az összefüggést a későbbiekben gyakran fogjuk alkalmazni. Eszerint egy R forgatási mátrix deriváltjának kiszámítása ekvivalens egy S ferdén szimmetrikus mátrixszal való mátrixszorzással.

3.1.2. Példa. Vegyük most azt a példát, amire a bevezetőben utaltunk. Legyen

$R = R_{x,\theta}$ az x tengely körüli, θ szögű forgatás mátrixa. Mivel

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \frac{dR}{d\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & -\cos \theta \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

ezért a transzponálttal való mátrixszorzást elvégezve

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\theta} R^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & -\cos \theta \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = S(i) \end{aligned} \quad (3.23)$$

adódik. Tehát azt az összefüggést kaptuk, mely szerint

$$\frac{dR_{x,\theta}}{d\theta} = S(i)R_{x,\theta} \quad (3.24)$$

ahol $i = (1, 0, 0)^T$ az egyik bázisvektor. Hasonló számolással bizonyítható, hogy

$$\frac{dR_{y,\theta}}{d\theta} = S(j)R_{y,\theta} \quad \text{és} \quad \frac{dR_{z,\theta}}{d\theta} = S(k)R_{z,\theta} \quad (3.25)$$

a $j = (0, 1, 0)^T$ és $k = (0, 0, 1)^T$ bázisvektorokra. Továbbá könnyen belátható, hogy tetszőleges g tengelyre, melynek egységvektora e , az $R_{g,\theta}$ forgatás deriváltja

$$\frac{dR_{g,\theta}}{d\theta} = S(e)R_{g,\theta} \quad (3.26)$$

3.2. Az eredő lineáris és szögsebesség

Tekintsük most azt az általánosabb esetet, amikor a forgástengely tetszőleges, origón átmenő, akár mozgó egyenes is lehet. Tegyük fel, hogy az R forgatási mátrix függ az időtől, azaz $R = R(t) \in SO(3)$ minden $t \in \mathbb{R}$ -re. Az előzőekben R paraméterre ugyan a θ szög volt, de a formális számolások miatt ezek ugyanazt eredményezik, csupán a szemléletes jelentésük különböző. Ekkor az $R(t)$ mátrix idő szerinti deriváltja, feltéve, hogy $R(t)$ folytonosan differenciálható t szerint, a (3.21) képlet alapján

$$\dot{R}(t) = S(t)R(t) \quad (3.27)$$

alakú, ahol $S(t)$ egy ferdén szimmetrikus mátrix. Ekkor $S(t)$ a (3.6) egyenlet alapján a megfelelő komponensek leolvasásával $S(\omega(t))$ alakban reprezentálható egy $\omega(t)$

vektor segítségével. Belátható, hogy ez a vektor a forgó rendszer szögsebessége a t időpillanatban a bázisrendszerhez viszonyítva. Így $R(t)$ idő szerinti deriváltja

$$\dot{R}(t) = S(\omega(t))R(t) \quad (3.28)$$

ahol $\omega(t)$ a szögsebesség.

A (3.28) egyenlet a szögsebesség és a forgatási mátrix deriváltja közötti kapcsolatot adja meg. Ez alapján, ha az (o_1, x_1, y_1, z_1) rendszer (o_0, x_0, y_0, z_0) rendszerhez viszonyított pillanatnyi orientációját R_1^0 határozza meg, akkor az ω_1^0 szögsebesség R_1^0 deriváltjától függ a fentiek szerint.

3.2.1. Példa. Az előző példát továbbgondolva legyen $R(t) = R_{x,\theta(t)}$. Ekkor a láncszabályt alkalmazva

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (3.29)$$

adódik, melyből az előző példa eredménye alapján

$$\frac{dR}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = S(i)R(t)\dot{\theta} = S(\omega(t))R(t) \quad (3.30)$$

kapható, ahol S linearitását felhasználva $\omega = i\dot{\theta}$ a szögsebesség, $i = (1, 0, 0)^T$ pedig az egyik bázisvektor. Hasonló összefüggés igaz tetszőleges tengelyű forgatásra is.

3.2.1. Szögsebességek összege

A robotkarok vizsgálata során a Denavit-Hartenberg konvenció használatából adódóan több, egymáshoz képest forgó koordináta-rendszer eredő szögsebességére vagyunk kíváncsiak. Ennek kiszámításához most meghatározunk egy képletet két mozgó rendszer, (o_1, x_1, y_1, z_1) és (o_2, x_2, y_2, z_2) szögsebességeinek összegére, az (o_0, x_0, y_0, z_0) rögzített koordináta-rendszerhez viszonyítva.

Tegyük fel, hogy a három rendszernek közös az origója. Ez nem jelent megkötést, hiszen a szögsebesség invariáns az eltolásra nézve. Legyenek $R_1^0(t)$ és $R_2^1(t)$ az (o_1, x_1, y_1, z_1) és (o_2, x_2, y_2, z_2) koordináta-rendszerek relatív orientációját megadó, időtől függő forgatási mátrixok. Ekkor lineáris algebrából tudjuk, hogy

$$R_2^0(t) = R_1^0(t)R_2^1(t) \quad (3.31)$$

Ha mindkét oldalát deriváljuk az idő szerint, akkor azt kapjuk, hogy

$$\dot{R}_2^0 = \dot{R}_1^0 R_2^1 + R_1^0 \dot{R}_2^1 \quad (3.32)$$

A (3.28) egyenlet értelmében \dot{R}_2^0 felírható

$$\dot{R}_2^0 = S(\omega_{0,2}^0)R_2^0 \quad (3.33)$$

alakban. Ebben a kifejezésben $\omega_{0,2}^0$ az (o_2, x_2, y_2, z_2) rendszerre ható eredő szögsebességet jelöli. Ez az R_1^0 és az R_2^1 mátrixok együttes forгатásából adódik.

Most vizsgáljuk meg a (3.32) egyenlet jobb oldalát. Az első tagra a (3.28) képlet felhasználásával

$$\dot{R}_1^0 R_2^1 = S(\omega_{0,1}^0)R_1^0 R_2^1 = S(\omega_{0,1}^0)R_2^0 \quad (3.34)$$

adódik. A jobb oldal második tagjára a (3.28) egyenlet újbóli felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$R_1^0 \dot{R}_2^1 = R_1^0 S(\omega_{1,2}^1)R_2^1 \quad (3.35)$$

Ezt az $I = (R_1^0)^T R_1^0$ taggal bővítve

$$R_1^0 S(\omega_{1,2}^1)R_2^1 = R_1^0 S(\omega_{1,2}^1)(R_1^0)^T R_1^0 R_2^1 \quad (3.36)$$

adódik, melyből a (3.10) egyenlet alapján

$$R_1^0 S(\omega_{1,2}^1)(R_1^0)^T R_1^0 R_2^1 = S(R_1^0 \omega_{1,2}^1)R_1^0 R_2^1 = S(R_1^0 \omega_{1,2}^1)R_2^0 \quad (3.37)$$

következik. Tehát azt kaptuk, hogy

$$R_1^0 \dot{R}_2^1 = S(R_1^0 \omega_{1,2}^1)R_2^0 \quad (3.38)$$

Ebben az egyenletben $\omega_{1,2}^1$ az (o_2, x_2, y_2, z_2) rendszernek az R_2^1 megváltozásához tartozó szögsebességét jelöli, az (o_1, x_1, y_1, z_1) koordináta-rendszerben felírva. Az $R_1^0 \omega_{1,2}^1$ szorzat ezt a szögsebességet az (o_0, x_0, y_0, z_0) rendszerhez viszonyítva fejezi ki, azaz $R_1^0 \omega_{1,2}^1$ az $\omega_{1,2}$ szabad vektor koordinátáit adja meg a 0-dik rendszerben.

A (3.32) egyenlet két oldalán szereplő tagokra kapott összefüggések alapján az

$$S(\omega_2^0)R_2^0 = \left(S(\omega_{0,1}^0) + S(R_1^0 \omega_{1,2}^1) \right) R_2^0 \quad (3.39)$$

összefüggés adódik. Felhasználva az S mátrix linearitását, azt kapjuk, hogy

$$\omega_2^0 = \omega_{0,1}^0 + R_1^0 \omega_{1,2}^1 \quad (3.40)$$

Ezzel beláttuk azt az állítást, mely szerint a szögsebesség-vektorok összeadhatóak, ha ugyanabban a koordináta-rendszerben, jelen esetben (o_0, x_0, y_0, z_0) -ban vannak felírva.

A fenti érvelés tetszőleges számú koordináta-rendszerre érvényes marad. Tegyük

fel, hogy ismerjük az

$$R_n^0 = R_1^0 R_2^1 \cdots R_n^{n-1} \quad (3.41)$$

forgatási mátrixokat. A fenti bizonyításhoz hasonlóan igazolható, hogy ekkor

$$\dot{R}_n^0 = S(\omega_{0,n}^0) R_n^0 \quad (3.42)$$

ahol

$$\begin{aligned} \omega_{0,n}^0 &= \omega_{0,1}^0 + R_1^0 \omega_{1,2}^1 + R_2^0 \omega_{2,3}^2 + \cdots + R_{n-1}^0 \omega_{n-1,n}^{n-1} = \\ &= \omega_{0,1}^0 + \omega_{1,2}^0 + \omega_{2,3}^0 + \cdots + \omega_{n-1,n}^0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

3.2.2. Egy pont lineáris sebessége

Tekintsünk egy (o_0, x_0, y_0, z_0) rendszert, és egy hozzá képest forgómozgást végző (o_1, x_1, y_1, z_1) rendszert, melyeknek közös az origója. Tegyük fel, hogy a p pont me-reven rögzítve van a mozgó rendszerhez. Most ennek a pontnak a lineáris sebességét fogjuk megvizsgálni. A p koordinátáit az (o_0, x_0, y_0, z_0) rendszerben

$$p^0(t) = R_1^0(t) p^1 \quad (3.44)$$

alakban kapjuk meg, ahol p^i az i -edik rendszerben felírt koordinátákat jelöli. Ebből a szorzat deriválási szabálya alapján

$$\dot{p}^0 = \dot{R}_1^0 p^1 + R_1^0 \dot{p}^1 \quad (3.45)$$

adódik. Innen a (3.28) egyenlet alkalmazásával, valamint felhasználva, hogy p koordinátái az (o_1, x_1, y_1, z_1) rendszerben nem változnak, azt kapjuk, hogy

$$\dot{R}_1^0 p^1 + R_1^0 \dot{p}^1 = S(\omega^0) R_1^0 p^1 \quad (3.46)$$

Végül a ferdén szimmetrikus mátrixok (3.9) tulajdonsága alapján

$$S(\omega^0) R_1^0 p^1 = S(\omega^0) p^0 = \omega^0 \times p^0 \quad (3.47)$$

amely a már ismert kifejezés a sebesség kiszámítására.

Természetesen a két koordináta-rendszer mozgása ennél általánosabb is lehet, hiszen az o_0 és o_1 pontok távolsága is változhat. Ennek megfelelően jelölje $o_1^0(t)$ a bázisrendszer origójából az (o_1, x_1, y_1, z_1) rendszer origójába mutató vektort. Ekkor a p pont koordinátáit megadó transzformáció

$$p^0(t) = R_1^0(t) p^1 + o_1^0(t) \quad (3.48)$$

alakú. Ezt a kifejezést a szorzat-szabály alapján deriválva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\dot{p}^0 &= \dot{R}p^1 + \dot{o} = \\ &= S(\omega)Rp^1 + \dot{o}\end{aligned}\tag{3.49}$$

Ebből a (3.9) tulajdonság felhasználásával, valamint az $r = R_1^0 p^1$ és $v = \dot{o}_1$ jelölések bevezetésével

$$S(\omega)Rp^1 + \dot{o} = \omega \times r + v\tag{3.50}$$

adódik. Amennyiben a p pont az (o_1, x_1, y_1, z_1) rendszerhez képest is elmozdul, akkor v -hez még hozzá kell adnunk az Rp^1 tagot, amely a p^1 koordináták megváltozásának sebességét fejezi ki az (o_0, x_0, y_0, z_0) rendszerhez képest.

3.3. A Jacobi-mátrix kiszámítása

Az előzőekben kiszámoltuk a koordináta-rendszerek mozgásából adódó lineáris és szögsebességeket. Most ezen eredményeket felhasználva meghatározzuk a robotkar Jacobi-mátrixát, amellyel a direkt sebességkinematikai feladat már könnyen megoldható.

Tekintsünk egy n ízületű robotkارت, melynek ízületi paraméterei q_1, \dots, q_n , ahol $q_i = d_i$, ha az ízület eltoló, és $q_i = \theta_i$, ha forgató. Jelölje

$$T_n^0(q) = \begin{bmatrix} R_n^0(q) & o_n^0(q) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\tag{3.51}$$

a kéz koordináta-rendszeréből a bázisrendszerbe képező transzformációt, ahol $q = (q_1, \dots, q_n)^T$ a paraméterek vektora. A robot mozgása során a q_i változók az idő függvényei lesznek, de ekkor R_n^0 és o_n^0 is a t paramétertől fognak függeni. Ebben a szakaszban megvizsgáljuk a kéz lineáris és szögsebességének a kapcsolatát az ízületi sebességek $\dot{q}(t)$ vektorával. A (3.28) egyenlet alapján

$$S(\omega_n^0) = \dot{R}_n^0(R_n^0)^T\tag{3.52}$$

ahol ω_n^0 a kéz szögsebesség-vektora. Vezessük be a kéz lineáris sebességére a $v_n^0 = \dot{o}_n^0$ jelölést. Ekkor a direkt sebességkinematikai feladat értelmében olyan J_v és J_ω $3 \times n$ -es mátrixokat keresünk, melyek kielégítik a

$$\begin{aligned}v_n^0 &= J_v \dot{q} \\ \omega_n^0 &= J_\omega \dot{q}\end{aligned}\tag{3.53}$$

egyenleteket. Ezt a két összefüggést egy közös képlettel is felírhatjuk

$$\xi = J\dot{q} \quad (3.54)$$

alakban, ahol

$$\xi = \begin{bmatrix} v_n^0 \\ \omega_n^0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad J = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Itt fontos megjegyezni, hogy habár a ξ vektor sebességet jelöl, mégsem egy helyváltozó idő szerinti deriváltja, mert a benne szereplő szögsebesség egy származtatott mennyiség. A J mátrixot a robotkar Jacobi-mátrixának nevezzük. Ez egy $6 \times n$ -es mátrix, ahol n az ízületek száma. Vizsgáljuk meg jobban ezt a mátrixot, hogy egy könnyen kiszámítható képletet tudjunk adni rá.

3.3.1. A kéz szögsebessége

Az előző szakaszban már foglalkoztunk az eredő szögsebességgel, és a (3.43) összefüggés által azt kaptuk, hogy a szögsebességek összeadhatóak szabad vektorokként, feltéve, hogy azonos koordináta-rendszerben vannak felírva. Ez azt jelenti, hogy úgy tudjuk meghatározni a kéz szögsebességét a bázisrendszerhez képest, hogy meghatározzuk az egyes ízületek szögsebességét a bázisrendszerben felírva, majd összeadjuk őket. Mivel a robotkar ízületei forgatók és eltolók is lehetnek, vizsgáljuk meg a kéz szögsebességét mindkét esetben.

Ha az i -edik ízület forgató, akkor a q_i ízületi paraméter θ_i -vel egyezik meg, a forgatás tengelye pedig z_{i-1} . A korábbiakhoz hasonlóan jelölje ω_i^{i-1} az i -edik szegmens szögsebességét, amely az i -edik ízület mozgásából adódik, az $(o_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ rendszerben felírva. Ez a szögsebesség az $i - 1$ -edik rendszerben kifejezhető

$$\omega_i^{i-1} = \dot{q}_i z_{i-1}^{i-1} = \dot{q}_i k \quad (3.56)$$

alakban, ahol $z_{i-1}^{i-1} = k$ az $i - 1$ -edik rendszer $(0, 0, 1)^T$ koordinátájú bázisvektora.

Abban az esetben, amikor az i -edik ízület eltoló, az i -edik rendszer mozgása az $i - 1$ -edikhez képest egy eltolás. Mivel nem történik forgatás, így a szögsebességre

$$\omega_i^{i-1} = 0 \quad (3.57)$$

adódik. Ezért eltoló ízület esetében a kéz szögsebessége nem függ q_i -től, amely most d_i -vel egyenlő.

Az imént kapott összefüggéseket beírva a (3.43) egyenletbe, a kéz eredő szögse-

bessége a bázis koordináta-rendszerben

$$\omega_n^0 = \delta_1 \dot{q}_1 k + \delta_2 \dot{q}_2 R_1^0 k + \cdots + \delta_n \dot{q}_n R_{n-1}^0 k \quad (3.58)$$

alakú lesz, ahol δ_i értéke 1, ha az i -edik ízület forgató, illetve 0, ha az ízület eltoló. Ha felhasználjuk az

$$z_{i-1}^0 = R_{i-1}^0 k \quad i = 1, \dots, n \quad (3.59)$$

összefüggést, ahol természetesen $z_0^0 = k = (0, 0, 1)^T$, akkor a fenti egyenlet az

$$\omega_n^0 = \sum_{i=1}^n \delta_i \dot{q}_i z_{i-1}^0 \quad (3.60)$$

alakot ölti.

Visszatérve a (3.54) egyenlethez, a benne szereplő Jacobi-mátrix alsó fele

$$J_\omega = [\delta_i z_0 \dots \delta_n z_{n-1}] \quad (3.61)$$

alakban kapható meg, ahol elhagytuk a felső indexeket a z tengelyek bázisvektorairól, mivel mindegyik a nulladik, azaz a bázisrendszerben van kifejezve.

3.3.2. A kéz lineáris sebessége

Mivel a kéz koordinátája az n -edik rendszerben $(0, 0, 0)^T$, ezért a lineáris sebessége egyszerűen csak \dot{o}_n^0 . Emlékezzünk vissza, hogy o_n^0 az ízületi paraméterek függvénye. Így a lánc-szabályt alkalmazva ennek deriváltja

$$\dot{o}_n^0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial o_n^0}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (3.62)$$

formára hozható. Ezt a (3.54) egyenlettel összevetve azt kapjuk, hogy a J_v mátrix i -edik oszlopát

$$J_{v_i} = \frac{\partial o_n^0}{\partial q_i} \quad (3.63)$$

adja meg. Vegyük észre, hogy ez a kifejezés a kéz lineáris sebességével egyenlő abban az esetben, ha lerögzítjük az összes ízületet az i -edik kivételével, amelyet egységnyi sebességgel mozgatunk. Ezt a módszert felhasználva a J_v mátrix oszlopai könnyen meghatározhatóak. Most külön-külön megvizsgáljuk a két lehetséges esetet az ízület típusa szerint.

Az eltoló ízület esete

Tekintsük először azt az esetet, amikor az i -edik ízület eltoló. A Denavit-Hartenberg konvenció alapján a T_n^0 transzformációt felírhatjuk három leképezés szorzataként oly módon, hogy először a kéz rendszeréből az i -edik rendszerbe transzformálunk, majd abból az $i - 1$ -edikbe, végül onnan a 0-adik, azaz a bázisrendszerbe. Ezáltal a homogén transzformáció az

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R_n^0 & o_n^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= T_n^0 = T_{i-1}^0 T_i^{i-1} T_n^i = \\ &= \begin{bmatrix} R_{i-1}^0 & o_{i-1}^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i^{i-1} & o_i^{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_n^i & o_n^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.64)$$

alakot ölti. Ebből a mátrixszorzásokat elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} R_n^0 & o_n^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_n^0 & R_i^0 o_n^i + R_{i-1}^0 o_i^{i-1} + o_{i-1}^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

ahonnan a kéz pozíciójára az

$$o_n^0 = R_i^0 o_n^i + R_{i-1}^0 o_i^{i-1} + o_{i-1}^0 \quad (3.66)$$

összefüggés adódik. Azt az esetet vizsgálva, amikor csak az i -edik ízület mozoghat, az o_{i-1}^0 és o_n^i vektorok nem változnak. Mivel eltoló ízületről van szó, az R_{i-1}^0 és az R_i^0 forgatómátrix is konstans. Ezek alapján o_n^0 deriválásával, amelynek most $q_i = d_i$ az egyetlen változója, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \dot{o}_n^0 &= \frac{\partial o_n^0}{\partial q_i} \dot{q}_i = \dot{d}_i \frac{\partial}{\partial d_i} (R_i^0 o_n^i + R_{i-1}^0 o_i^{i-1} + o_{i-1}^0) = \\ &= \dot{d}_i \frac{\partial}{\partial d_i} (R_{i-1}^0 o_i^{i-1}) \end{aligned} \quad (3.67)$$

Emlékezzünk vissza, hogy $o_i^{i-1} = (a_i \cos \theta_i, a_i \sin \theta_i, d_i)^T$. Ezt felhasználva

$$\dot{d}_i \frac{\partial}{\partial d_i} (R_{i-1}^0 o_i^{i-1}) = \dot{d}_i R_{i-1}^0 \frac{\partial}{\partial d_i} \begin{bmatrix} a_i \cos \theta_i \\ a_i \sin \theta_i \\ d_i \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

amelyből a deriválást elvégezve

$$\dot{d}_i R_{i-1}^0 \frac{\partial}{\partial d_i} \begin{bmatrix} a_i \cos \theta_i \\ a_i \sin \theta_i \\ d_i \end{bmatrix} = \dot{d}_i R_{i-1}^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \dot{d}_i z_{i-1}^0 \quad (3.69)$$

adódik, azaz $\dot{o}_n^0 = \dot{d}_i z_{i-1}^0$. Ezt összevetve a (3.54) képlettel azt kaptuk, hogy eltoló ízületek esetében

$$J_{v_i} = z_{i-1} \quad (3.70)$$

A forgató ízület esete

Ha az i -edik ízület forgató, akkor $q_i = \theta_i$. A (3.66) egyenletből kiindulva, q_i helyére θ_i -t írva, és felhasználva, hogy R_i^0 nem konstans θ_i -re nézve, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \dot{o}_n^0 &= \frac{\partial o_n^0}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(R_i^0 o_n^i + R_{i-1}^0 o_i^{i-1} + o_{i-1}^0 \right) \dot{\theta}_i = \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(R_i^0 o_n^i + R_{i-1}^0 o_i^{i-1} \right) \dot{\theta}_i \end{aligned} \quad (3.71)$$

Innen a deriválás elvégzésével

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(R_i^0 o_n^i + R_{i-1}^0 o_i^{i-1} \right) \dot{\theta}_i = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(R_i^0 \right) o_n^i \dot{\theta}_i + R_{i-1}^0 \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(o_i^{i-1} \right) \dot{\theta}_i \quad (3.72)$$

adódik. Mielőtt tovább alakítanánk ezt a kifejezést, vizsgáljuk meg a jobb oldal második tagját. Mivel $o_i^{i-1} = (a_i \cos \theta_i, a_i \sin \theta_i, d_i)^T$, ezért

$$R_{i-1}^0 \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(o_i^{i-1} \right) \dot{\theta}_i = R_{i-1}^0 \frac{\partial}{\partial \theta_i} \begin{bmatrix} a_i \cos \theta_i \\ a_i \sin \theta_i \\ d_i \end{bmatrix} \dot{\theta}_i = R_{i-1}^0 \begin{bmatrix} -a_i \sin \theta_i \\ a_i \cos \theta_i \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_i \quad (3.73)$$

Vegyük észre, hogy $S(k) o_i^{i-1} = (-a_i \sin \theta_i, a_i \cos \theta_i, 0)^T$. Ezt felhasználva az egyenlet

$$R_{i-1}^0 \begin{bmatrix} -a_i \sin \theta_i \\ a_i \cos \theta_i \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_i = \dot{\theta}_i R_{i-1}^0 S(k) o_i^{i-1} \quad (3.74)$$

alakba írható. Ezt az $I = (R_1^0)^T R_1^0$ taggal bővítve

$$\dot{\theta}_i R_{i-1}^0 S(k) o_i^{i-1} = \dot{\theta}_i R_{i-1}^0 S(k) (R_{i-1}^0)^T R_{i-1}^0 o_i^{i-1} \quad (3.75)$$

adódik, amely a (3.10) összefüggés értelmében

$$\dot{\theta}_i R_{i-1}^0 S(k) (R_{i-1}^0)^T R_{i-1}^0 o_i^{i-1} = \dot{\theta}_i S(R_{i-1}^0 k) R_{i-1}^0 o_i^{i-1} = \dot{\theta}_i S(z_{i-1}^0) R_{i-1}^0 o_i^{i-1} \quad (3.76)$$

formára hozható. Ezzel azt kaptuk, hogy

$$R_{i-1}^0 \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(o_i^{i-1} \right) \dot{\theta}_i = \dot{\theta}_i S(z_{i-1}^0) R_{i-1}^0 o_i^{i-1} \quad (3.77)$$

érvényes. Visszatérve az előző számoláshoz, arra jutottunk, hogy

$$\begin{aligned}\dot{o}_n^0 &= \frac{\partial}{\partial \theta_i} (R_i^0) o_n^i \dot{\theta}_i + R_{i-1}^0 \frac{\partial}{\partial \theta_i} (o_i^{i-1}) \dot{\theta}_i = \\ &= \dot{\theta}_i S(z_{i-1}^0) R_i^0 o_n^i + \dot{\theta}_i S(z_{i-1}^0) R_{i-1}^0 o_i^{i-1}\end{aligned}\quad (3.78)$$

amiből kiemeléssel

$$\dot{\theta}_i S(z_{i-1}^0) R_i^0 o_n^i + \dot{\theta}_i S(z_{i-1}^0) R_{i-1}^0 o_i^{i-1} = \dot{\theta}_i S(z_{i-1}^0) (R_i^0 o_n^i + R_{i-1}^0 o_i^{i-1}) \quad (3.79)$$

adódik. Vegyük észre, hogy az $R_i^0 o_n^i + R_{i-1}^0 o_i^{i-1}$ vektor egyszerűen az $i - 1$ -edik origót az n -edikkel összekötő vektor a bázisrendszerben felírva. Ez onnan látszik, hogy o_i^{i-1} az $i - 1$ -edik origóból az i -edikbe mutató vektor, o_n^i az i -edikből az n -edikbe mutat, a forgatási mátrixokkal való szorzás pedig ezen szabad vektorok koordinátáit adják meg a bázisrendszerben. Így az összegük kifejezhető a bázis origójából az n -edik, illetve az $i - 1$ -edik origóba mutató vektor különbségeként.

Ezt, és a (3.9) összefüggést felhasználva

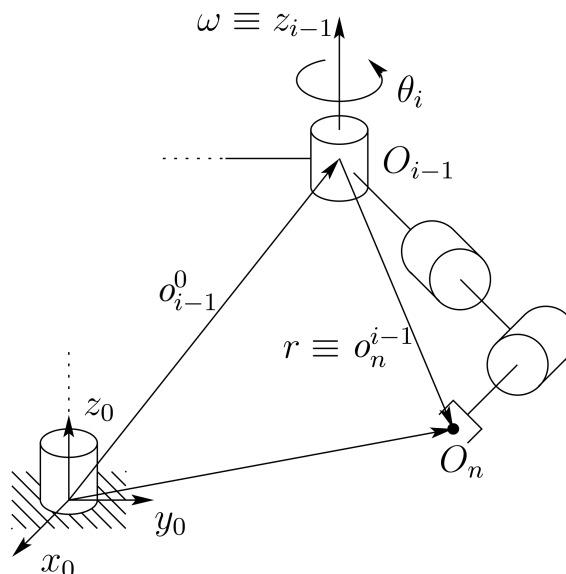
$$\dot{\theta}_i S(z_{i-1}^0) (R_i^0 o_n^i + R_{i-1}^0 o_i^{i-1}) = \dot{\theta}_i S(z_{i-1}^0) (o_n^0 - o_{i-1}^0) = \dot{\theta}_i z_{i-1}^0 \times (o_n^0 - o_{i-1}^0) \quad (3.80)$$

azaz $\dot{o}_n^0 = \dot{\theta}_i z_{i-1}^0 \times (o_n^0 - o_{i-1}^0)$.

Az eredményt ismét összevetve a (3.54) képlettel azt kaptuk, hogy forgató ízületek esetében

$$J_{v_i} = z_{i-1} \times (o_n - o_{i-1}) \quad (3.81)$$

ami $\omega = z_{i-1}$ és $r = o_n - o_{i-1}$ választással a már ismert $v = \omega \times r$ összefüggésre vezet.



3.2. ábra. Az i -edik ízület hatása a kéz sebességére

3.3.3. A Jacobi-mátrix egyesítése

A J_v mátrixról szerzett eddigi ismereteinket összegezve a

$$J_v = [J_{v_1} J_{v_2} \dots J_{v_n}] \quad (3.82)$$

oszlopvektoros előállításra a

$$J_{v_i} = \begin{cases} z_{i-1} \times (o_n - o_{i-1}) & \text{ha az } i\text{-edik ízület forgató} \\ z_{i-1} & \text{ha az } i\text{-edik ízület eltoló} \end{cases} \quad (3.83)$$

összefüggés érvényes. Ehhez hasonlóan, a J_ω mátrix

$$J_\omega = [J_{\omega_1} J_{\omega_2} \dots J_{\omega_n}] \quad (3.84)$$

alakjára a

$$J_{\omega_i} = \begin{cases} z_{i-1} & \text{ha az } i\text{-edik ízület forgató} \\ 0 & \text{ha az } i\text{-edik ízület eltoló} \end{cases} \quad (3.85)$$

eredményeket kaptuk. A két részt egyesítve a (3.54) képlet szerint, egy n ízületű robotkar Jacobi-mátrixát

$$J = [J_1 J_2 \dots J_n] \quad (3.86)$$

formában felírva, az i -edik oszlopra

$$J_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (o_n - o_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

adódott, ha az i -edik ízület forgató, illetve

$$J_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

ha az i -edik ízület eltoló.

Vegyük észre, hogy ezek a kifejezések a Denavit-Hartenberg konvenció által meghatározott koordináta-rendszereket leíró mennyiségek. Ezért, ha ezeket már ismerjük, akkor a Jacobi-mátrixot már könnyedén ki tudjuk számolni belőlük. Valóban, a mátrix megadásához csupán a z_i bázisvektorok és az o_i origók koordinátáira van szükségünk. Mivel a direkt kinematikai feladat megoldása nélkülözhetetlen a robotkarok programozásához, ez azt jelenti, hogy egyúttal a direkt sebességkinematikai feladatot is megoldottuk.

Az előző fejezet eredményére visszaemlékezve könnyen meggondolható, hogy a z_i vektor bázisrendszer szerinti koordinátáit a T_i^0 áttérési mátrix harmadik oszlo-

pának első három eleme adja meg, az o_i origó pedig a negyedik oszlop első három eleméből olvasható le. Tehát csak a T mátrixok harmadik és negyedik oszlopára van szükségünk ahhoz, hogy a fenti formulák alapján kiszámoljuk a Jacobi-mátrixot.

Az itt leírt módszer azonban nem csak a kéz sebességének kiszámítására alkalmas, hanem a robotkar bármely tetszőleges pontjának sebességét megadhatjuk vele. Ez a mozgás dinamikai egyenleteinek felírásakor hasznos, amikor a szegmensek tömegközéppontjainak sebességeit kell meghatározni.

3.4. Az analitikus Jacobi-mátrix

Az előző szakaszban a robotkar geometriai tulajdonságaiból vezettünk le összefüggéseket a kéz sebességére vonatkozóan. Ennek megfelelően az így kapott mátrixot a geometriai Jacobi-mátrixnak nevezzük. Ebben a konstrukcióban a kéz irányát egy forgatási mátrixszal, azaz kilenc paraméterrel adtuk meg. Most azt az esetet vizsgáljuk meg, amikor a koordináta-rendszer elfordulását három paraméterrel, azaz egy minimális reprezentációval írjuk le. Az ez alapján meghatározott $J_a(q)$ mátrixot az analitikus Jacobi-mátrixnak hívjuk. Jelölje mostantól

$$X = \begin{bmatrix} d(q) \\ \alpha(q) \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

a kéz helyzetét, ahol $d(q)$ a bázisrendszer origójából a kéz rendszerének origójába mutató vektor, $\alpha(q)$ pedig egy, a kéz bázisrendszerhez viszonyított elfordulását leíró minimális reprezentáció. Például legyen $\alpha = (\phi, \theta, \psi)^T$ Euler-szögekkel megadva. A geometriaihoz hasonlóan az analitikus Jacobi-mátrixra is felírható egy

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{d} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = J_a(q)\dot{q} \quad (3.90)$$

alakú összefüggés a kéz sebességének meghatározására.

Megmutatható, hogy ha $R = R_{z,\psi}R_{y,\theta}R_{z,\phi}$ az Euler-szög transzformáció, azaz

$$R = \begin{bmatrix} c\psi c\theta c\phi - s\psi s\phi & -c\phi s\psi - c\psi c\theta s\phi & c\psi s\theta \\ c\psi s\phi + c\theta c\phi c\psi & c\psi c\phi - c\theta s\psi s\phi & s\psi s\theta \\ -c\phi s\theta & s\theta s\phi & c\theta \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

ahol c és s a \cos és \sin rövidítése, akkor a hozzá tartozó ω szögsebesség a

$$B(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \psi \sin \theta & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi \sin \theta & \cos \psi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

jelölés használatával

$$\begin{aligned}\omega &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\psi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \psi \sin \theta & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi \sin \theta & \cos \psi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = B(\alpha)\dot{\alpha}\end{aligned}\tag{3.93}$$

formában áll elő. A fenti összefüggést egyesítve a Jacobi-mátrix korábbi

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = J(q)\dot{q}\tag{3.94}$$

definíciójával, azt kapjuk, hogy

$$J(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{d} \\ B(\alpha)\dot{\alpha} \end{bmatrix}\tag{3.95}$$

amit felírhatunk

$$\begin{bmatrix} \dot{d} \\ B(\alpha)\dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}\tag{3.96}$$

alakban is. Ekkor a (3.90) képletet behelyettesítve

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B(\alpha) \end{bmatrix} J_a(q)\dot{q}\tag{3.97}$$

adódik. Ezek alapján kaptunk egy módszert az analitikus Jacobi-mátrixnak a geometriaiból való kiszámítására

$$J_a(q) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B(\alpha)^{-1} \end{bmatrix} J(q)\tag{3.98}$$

módon, feltéve, hogy $\det B(\alpha) \neq 0$.

3.5. Szingularitások meghatározása

Azon konfigurációkat, melyekre a Jacobi-mátrix rangja nem maximális, szinguláris konfigurációknak vagy szingularitásoknak nevezzük. Ezeknek a vizsgálata az inverz sebességkinematika szempontjából fontos, mert látni fogjuk, hogy teljes rangú esetben a megoldás egyszerűen kiszámítható.

További elnevezés még, hogy a $B(\alpha)$ mátrix szingularitásait reprezentációs szin-

gularitásoknak hívjuk. A (3.92) képletből könnyen megmutatható, hogy $\sin \theta \neq 0$ esetén $B(\alpha)$ invertálható, ami a (3.98) egyenlet szerint szükséges a teljes rangúsághoz. Ez ugyanis azt mutatja, hogy az analitikus Jacobi-mátrix szingularitásai magukban foglalják a reprezentáció és a geometriai Jacobi-mátrix szingularitásait.

A $6 \times n$ -es $J(q)$ Jacobi-mátrix definíció szerint meghatároz egy

$$\xi = J(q)\dot{q} \quad (3.99)$$

leképezést az ízületi sebességek \dot{q} vektora és a kéz sebességének $\xi = (v, \omega)^T$ vektora között. Ez az összefüggés azt mutatja, hogy a kéz minden lehetséges sebességvektora a Jacobi-mátrix oszlopainak lineáris kombinációja, azaz részletesen kiírva

$$\xi = J_1\dot{q}_1 + J_2\dot{q}_2 + \dots + J_n\dot{q}_n \quad (3.100)$$

adódik. Mivel $\xi \in \mathbb{R}^6$, ezért szükséges, hogy J oszlopai között legyen hat lineárisan független ahhoz, hogy a kéz tetszőleges sebességet el tudjon érni. Ez $6 < n$ esetén pontosan akkor teljesül, ha J teljes rangú. Itt fontos megjegyezni, hogy ez a rang nem állandó, hanem a q paraméterek függvényében változik.

A robotkar szingularitásainak azonosítása több okból is fontos feladat:

- A szingularitások olyan konfigurációkat jelölnek, melyekből a kéz bizonyos irányú mozgásai nem valósíthatóak meg, azaz a robotkar veszít a szabadsági fokából.
- Szingularitásoknál korlátos kéz-sebességekhez nem korlátos ízületi sebességek tartozhatnak, mert ezek kiolthatják egymást.
- Szingularitásoknál a kézre vonatkozó korlátos erőkhöz és nyomatékokhoz nem korlátos ízületi erők és nyomatékok tartozhatnak.
- A szingularitások általában a robot munkaterének peremén, azaz a hatósugarának szélén lévő pontokhoz tartoznak, hiszen ezeknél messzebbre nem juttatható el a kéz.
- A szingularitások a munkatér azon pontjaihoz tartoznak, melyek elérhetetlenné válnak a robotkar alaki tulajdonságainak tetszőlegesen kicsi megváltoztatása esetén. Ez a terhelés által bekövetkező esetleges deformálódások miatt fontos.
- Szingularitások közelében nem létezik egyértelmű megoldása az inverz kinematikai problémának. Ilyen esetekben vagy nincs megoldás, vagy végtelen sok van.

Számos módszer létezik a Jacobi-mátrix szingularitásainak meghatározására. Mi a $J(q) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ esetben azt a tényt fogjuk kihasználni, hogy egy négyzetes mátrix pontosan akkor szinguláris, ha a determinánsa nulla. Általában egy $\det J(q) = 0$ nemlineáris egyenlet megoldása nehéz feladat. Egy eljárás, amely ebben segítségünkre lehet, az a szingularitások szétbontásának módszere. Ez minden olyan esetben használható, amikor a robotkar például gömbcsuklóval van felszerelve.

3.5.1. Szingularitások szétbontása

Az eddigiekben a robotkar helyzetét a szegmensekhez rögzített koordináta-rendszerek segítségével határoztuk meg, a direkt kinematikai feladat megoldása által. Vegyük észre, hogy a Denavit-Hartenberg konvenció csupán egy szisztematikus módszer ennek elvégzésére. Habár az így kapott egyenletek függenek a koordináta-rendszerek megválasztásától, maga a robotkar konfigurációja egy geometriai mennyiség, amely független az őt leíró koordináta-rendszerektől. Ennek felismerésével lehetőség nyílik számunkra, hogy gömbcsuklóval felszerelt robotkarok esetén a szingularitások vizsgálatát szétbontsuk két egyszerűbb problémára. Az első az úgynevezett kar-szingularitások meghatározása, melyek a kar, azaz az első három vagy több ízület mozgásából adódnak. A második a csukló-szingularitások meghatározása, melyek a gömbcsukló mozgásából erednek.

Tegyük fel, hogy $n = 6$, azaz a manipulátor egy három szabadságfokú karból és egy három szabadságfokú gömbcsuklóból áll. Ekkor a Jacobi-mátrix egy 6×6 -os mátrix, és egy q konfiguráció pontosan akkor szinguláris, ha $\det J(q) = 0$.

Bontsuk fel a Jacobi-mátrixot a karhoz és a gömbcsuklóhoz tartozó részre, majd particionáljuk tovább 3×3 -as blokkokra

$$J = [J_P | J_O] = \left[\begin{array}{c|c} J_{11} & J_{12} \\ \hline J_{21} & J_{22} \end{array} \right] \quad (3.101)$$

módon. A forgató ízületekre kapott összefüggés alapján az utolsó három ízületre

$$J_O = \left[\begin{array}{ccc} z_3 \times (o_6 - o_3) & z_4 \times (o_6 - o_4) & z_5 \times (o_6 - o_5) \\ z_3 & z_4 & z_5 \end{array} \right] \quad (3.102)$$

A gömbcsukló tengelyei egy közös pontban metszik egymást, ezért ha úgy választjuk meg a koordináta-rendszereket, hogy $o_3 = o_4 = o_5 = o_6 = o$ teljesüljön, akkor

$$J_O = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ z_3 & z_4 & z_5 \end{array} \right] \quad (3.103)$$

alakú lesz. Ez azért hasznos, mert ekkor a Jacobi-mátrix blokkjai alsó háromszög-

mátrixot alkotnak

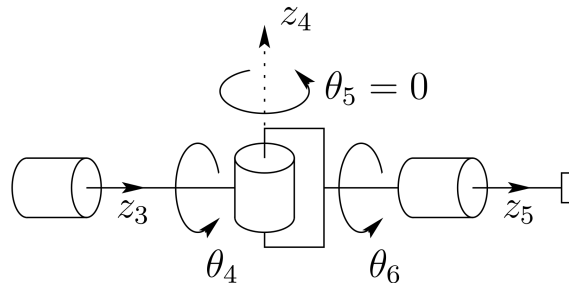
$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

formában, melynek determinánsa

$$\det J = \det J_{11} \det J_{22} \quad (3.105)$$

ahol J_{11} és J_{22} 3×3 -as mátrixok. Itt a J_{11} mátrix i -edik oszlopa $z_{i-1} \times (o - o_{i-1})$, ha az i -edik ízület forgató, illetve z_{i-1} , ha az ízület eltoló, továbbá $J_{22} = [z_3, z_4, z_5]$.

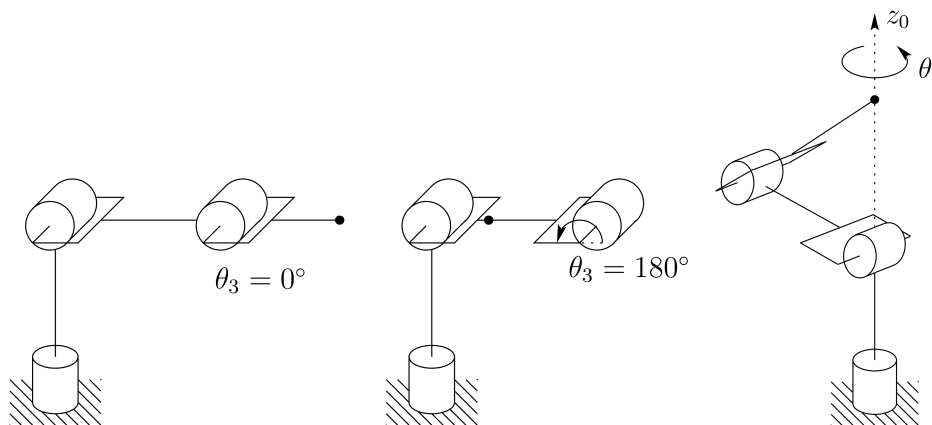
Tudjuk, hogy $\det J = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\det J_{11} = 0$ vagy $\det J_{22} = 0$. Ezek közül az első egyenletet a kar, a másodikat pedig a gömbcsukló szingularitásai elégítik ki. Ezzel azt kaptuk, hogy a manipulátor szinguláris konfigurációinak halmaza a két egyenlet megoldáshalmazainak uniója. Fontos megjegyezni, hogy a Jacobi-mátrix ezen alakja nem szükségképpen adja meg a helyes összefüggést a kéz sebessége és az ízületi sebességek között, csupán a szingularitások meghatározásának egyszerűsítését szolgálja.



3.3. ábra. A gömbcsukló szingularitása

Az előző egyenletekből azt kaptuk, hogy egy gömbcsukló pontosan akkor van szinguláris konfigurációban, ha a z_3, z_4 és z_5 vektorok lineárisan összefüggőek. Ez akkor fordulhat elő, amikor a z_3 és a z_5 tengelyek egy egyenesbe esnek. Minden olyan konfiguráció, amelyben két forgató ízület tengelye egybeesik, szingularitást eredményez, mivel ekkor egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú forgatások nem változtatják meg a kéz helyzetét. A fenti konfiguráció a gömbcsukló egyetlen szingularitása, és ez a geometriai felépítése miatt elkerülhetetlen. A kar-singularitások az adott manipulátorhoz tartozó J_{11} mátrix kiszámítása után $\det J_{11} = 0$ megoldásával könnyen meghatározhatóak.

Ez a feladat elsősorban az útvonalkeresés szempontjából fontos. Olyan görbe mentén szeretnénk mozgatni a robot kezét, amely vagy elkerüli a szingularitásokat, vagy olyan irányban halad át rajtuk, amelyre létezik egyértelmű megoldás.



3.4. ábra. Az antropomorf robotkar szingularitásai

3.6. Az inverz sebességkinematikai feladat

Korábban említettük az inverz sebességkinematikai problémát, melynek kiindulópontja az

$$\xi = J\dot{q} \quad (3.106)$$

egyenlet, amely az ízületek \dot{q} sebességgel történő mozgásából eredő kéz-sebességet adja meg. Az inverz feladat célja, hogy megtalálja azon \dot{q} ízületi sebességeket, melyekre adott ξ esetén a fenti összefüggés teljesül, azaz amelyekre kéz az előírt ξ sebességvektorral mozog. Ha a Jacobi-mátrix négyzetes és nem szinguláris, akkor ez a probléma egyszerűen megoldható egy invertálással, hiszen

$$\dot{q} = J^{-1}\xi \quad (3.107)$$

Azon manipulátorok esetében, amelyek nem pontosan hat ízületből állnak, a Jacobi-mátrix nem invertálható, hiszen nem is négyzetes. Ebben az esetben az inverz feladat pontosan akkor oldható meg, ha ξ benne van a J oszlopai által kifeszített térben. Ez egyszerűen eldönthető a következő rangvizsgálattal, amelyet lineáris algebrából ismerünk.

3.6.1. Állítás. *Egy ξ vektor akkor és csak akkor van benne egy $J(q)$ mátrix képterében, ha $\text{rang}J(q) = \text{rang}[J(q)|\xi]$.*

Ennek megoldására számos algoritmus létezik, például az egyik ilyen a Gauss-elimináció.

Van azonban egy érdekes módszer abban az esetben, amikor $n > 6$. Ekkor a \dot{q} megoldást J jobb oldali pszeudinverze segítségével is megkaphatjuk.

3.6.1. Definíció. Legyen $m < n$. Ekkor egy $J \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix jobb oldali pszeudinverzén azt a J^+ mátrixot értjük, melyre $JJ^+ = I$, ahol $I \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Ezen pszeudo inverz megkonstruálásához felhasználjuk a lineáris algebra alábbi eredményét.

3.6.2. Állítás. Minden $J \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixra, ha $m < n$ és $\text{rang} J = m$, akkor a (JJ^T) mátrixnak létezik inverze.

Ebben az esetben $(JJ^T) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, és $\text{rang}(JJ^T) = m$. Ekkor az állítás értelmében felírható a

$$(JJ^T)(JJ^T)^{-1} = I \quad (3.108)$$

egyenlet, amelyből átzárójelezéssel

$$\begin{aligned} J(J^T(JJ^T)^{-1}) &= I \\ JJ^+ &= I \end{aligned} \quad (3.109)$$

adódik. A fenti kifejezésben a $J^+ = J^T(JJ^T)^{-1}$ mátrixot J jobb oldali pszeudo inverzének nevezzük, mivel eleget tesz a definíciónak, azaz $JJ^+ = I \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Vegyük észre, hogy $J^+J \in \mathbb{R}^{n \times n}$, és általában $J^+J \neq I$.

Innen már könnyen belátható, hogy egy megoldást szolgáltat a

$$\dot{q} = J^+\xi + (I - J^+J)b \quad (3.110)$$

kifejezés, ahol $b \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges vektor. Ennek igazolásához egyszerűen csak be kell helyettesíteni a (3.54) egyenletbe, azaz szorozzuk be balról mindkét oldalt J -vel.

$$\begin{aligned} J\dot{q} &= J(J^+\xi + (I - J^+J)b) = \\ &= JJ^+\xi + J(I - J^+J)b = \\ &= JJ^+\xi + (J - JJ^+J)b \end{aligned} \quad (3.111)$$

Kihasználva, hogy J^+ pszeudo inverze J -nek, azt kapjuk, hogy

$$JJ^+\xi + (J - JJ^+J)b = \xi + (J - J)b = \xi \quad (3.112)$$

Általában, $m < n$ esetén $(I - J^+J) \neq 0$, és minden $(I - J^+J)b$ alakú vektor J nullterében van. Ez azt jelenti, hogy ha \dot{q} az ízületi sebességek egy olyan vektora, amely $\dot{q} = (I - J^+J)b$ alakú, akkor $J\dot{q} = 0$, vagyis az ízületek \dot{q} sebességgel történő mozgataása esetén a kéz egy helyben marad. Ezért, ha \dot{q} egy megoldás, akkor $\dot{q} + \dot{q}$ is megoldás minden $\dot{q} = (I - J^+J)b$ esetén, ahol b tetszőleges vektor.

A J mátrix jobb oldali pszeudo inverze egyszerűen megkapható a szinguláris értékek szerinti felbontásából.

3.6.3. Állítás. Minden $J \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix felbontható $J = U\Sigma V^T$ alakban, ahol

$U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ és $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonális mátrixok, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pedig a szinguláris értékek mátrixa.

Ekkor a pszeudoinverz felírható

$$J^+ = V\Sigma^+U^T \quad (3.113)$$

alakban, ahol U és V ortogonális mátrixok,

$$\Sigma^+ = \left[\begin{array}{ccc} \sigma_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m^{-1} \\ \hline & & 0 \end{array} \right] \quad (3.114)$$

pedig a szinguláris értékek inverzeinek $n \times m$ -es mátrixa.

Hasonló módszert alkalmazhatunk akkor is, amikor az analitikus Jacobi-mátrixot használjuk a geometriai helyett. Az ízületi sebességek és a kéz sebessége közötti kapcsolatot az analitikus Jacobi-mátrix a (3.90) egyenlet alapján

$$\dot{X} = J_a(q)\dot{q} \quad (3.115)$$

formában adja meg. Tehát az inverz sebességkinematikai feladat ismét egy lineáris egyenletrendszer megoldására vezethető vissza, amely az előzőekhez hasonlóan oldható meg.

A (3.115) egyenletet még egyszer deriválva kapjuk az

$$\ddot{X} = J_a(q)\ddot{q} + \frac{d}{dt}(J_a(q))\dot{q} \quad (3.116)$$

gyorsulási egyenletet. Ez alapján, ha adott a kéz gyorsulásának \ddot{X} vektora, akkor az ízületek pillanatnyi gyorsulásának \ddot{q} vektorát a

$$b = \ddot{X} - \frac{d}{dt}(J_a(q))\dot{q} = J_a(q)\ddot{q} \quad (3.117)$$

egyenlet megoldásából kapjuk.

A hat szabadságfokú manipulátorokra alkalmazva a fentieket, az inverz sebesség- és gyorsulásegyenletek

$$\dot{q} = J_a(q)^{-1}\dot{X} \quad (3.118)$$

valamint

$$\ddot{q} = J_a(q)^{-1}b \quad (3.119)$$

alakban írhatóak fel, feltéve, hogy $\det J_a(q) \neq 0$.

4. Összefoglalás

Az előző fejezetekben azokra a kérdésekre kerestük a választ, hogy hogyan határozhatjuk meg a manipulátor kezének pozícióját, orientációját, lineáris illetve szögsebességét, valamint hogy milyen ízületi paraméterek segítségével érhető el, hogy a kéz adott helyzetbe kerüljön, vagy hogy adott sebességgel mozogjon. Ezek megválaszolása érdekében bevezettük a Denavit-Hartenberg konvenciót, amellyel könnyen le tudtuk írni a szegmensekhez illesztett koordináta-rendszerek helyét és elfordulását, azaz megoldottuk a direkt kinematikai feladatot.

A sebességkinematikai probléma keretében megismerkedtünk a ferdén szimmetrikus mátrixokkal, a szögsebességgel és ezeknek a forgatási mátrixokhoz való viszonyával. Levezettünk néhány képletet az eredő lineáris és szögsebesség kiszámítására. Ennek segítségével meghatároztuk a robotkar Jacobi-mátrixát, amellyel a kéz sebességét már könnyen meg tudtuk adni. Ezek után megvizsgáltuk a manipulátor singularitásait, azaz azon konfigurációkat, melyekre a kar veszít a szabadságfokából. Végül megoldottuk az inverz sebességkinematikai feladatot, melynek eredményeképpen tetszőleges sebességgel és gyorsulással tudtuk mozgatni a robot kezét.

Felhasznált irodalom

- [1] FREUD Róbert. *Lineáris algebra*. Budapest: ELTE Eötvös Kiadó, 2006. 518 pp. ISBN: 9634634710.
- [2] HAJÓS György. *Bevezetés a geometriába*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006. 594 pp. ISBN: 963190116.
- [3] SPONG Mark W., HUTCHINSON Seth, and VIDYASAGAR M. *Robot Modeling and Control*. New York: John Wiley and Sons, 2005. 496 pp. ISBN: 9780471649908.