

A MÁGNESES VEKTORPOTENCIÁL, MINT VALÓSÁGOSAN LÉTEZŐ VEKTORMEZŐ

Hárs György, Varga Gábor
BME Fizikai Intézet

A legszélesebb körben alkalmazott elektrotechnikai eszköz a transzformátor, amely alapértelmezésben két galvanikusan független tekercsből áll. A tekercsek geometriai kialakítása lehet szolenoid vagy toroid jellegű. A tekercsek szoros mágneses csatolásban állnak. Tekintsük azt az esetet, amikor a szekunder tekercs belsejében helyezkedik el a primer. Az általánosan elfogadott elmélet szerint a szekunder tekercsben indukált feszültség forrása a primer tekercs által létrehozott mágneses fluxus megváltozása. Ezzel a magyarázattal azonban az a probléma, hogy a primer tekercsen kívül, a szekunder tekercs helyén gyakorlatilag nincsen mágneses tér, így a mágneses fluxus és annak változása is csak a primer tekercs belsejére

korlátozódik. Ennek dacára a szekunder tekercsben mindig megjelenik az indukált feszültség.

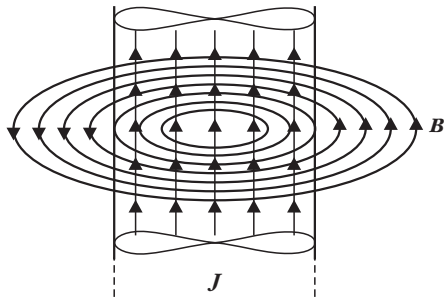
Ezt a ellentmondást oldja fel a mágneses vektorpotenciál. Ismert a harmadik Maxwell-egyenlet, amely a \mathbf{B} mágneses indukció forrásmentességét írja le.

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Ezen kívül ismert a következő vektoranalitikai összefüggés:

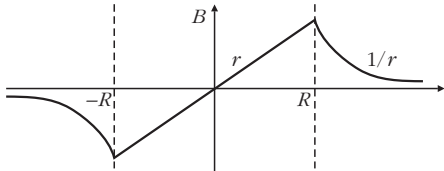
$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) \equiv 0.$$

Vagyis egy tetszőleges \mathbf{A} vektormező rotációjaként előállított vektormező divergenciája azonosan nulla.

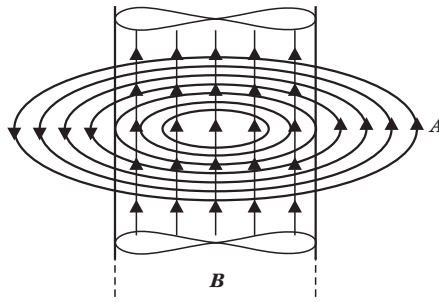


Belül: $2 r \pi B = \mu_0 r^2 \pi j \Rightarrow B = \mu_0 \frac{j}{2} r,$

kívül: $2 r \pi B = \mu_0 R^2 \pi j \Rightarrow B = \mu_0 \frac{j}{2} \frac{R^2}{r}.$

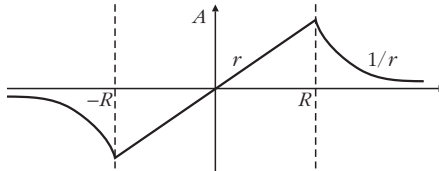


1. ábra. Gerjesztési törvény



Belül: $2 r \pi A = r^2 \pi B \Rightarrow A = \frac{B}{2} r,$

kívül: $2 r \pi A = R^2 \pi B \Rightarrow A = \frac{B}{2} \frac{R^2}{r}.$



2. ábra. Vektorpotenciál-örvénytér

Ha tehát a \mathbf{B} mágneses indukciót egy \mathbf{A} mágneses vektorpotenciál rotációjaként vezetjük le, akkor megszabadulunk a harmadik Maxwell-egyenlettől, mint külön feltételtől, mivel ekkor az említett matematikai azonosság garantálja a \mathbf{B} tér forrásmentességét:

$$\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

Figyelmet érdemel a vektorpotenciál egyértelműségének a kérdése. Az ismert matematikai összefüggés szerint:

$$\text{rot}(\text{grad } U) \equiv 0,$$

ahol U tetszőleges skalármező. Ezért a vektorpotenciál csupán egy tetszőleges gradiens vektortér erejéig meghatározott. Általában az additív vektormezőt nullának, míg a vektorpotenciál-mezőt forrásmentesnek tekintjük ($\text{div} \mathbf{A} \equiv 0$). Ez utóbbi feltételt Coulomb-mértéknek nevezik az elméleti elektrodinamikában.

A továbbiakban mágnesezhető anyagot nem tartalmazó térben elhelyezkedő vezetőben folyó árammal foglalkozunk. Az első Maxwell-egyenlet csonkított alakja ekkor a következő:

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j},$$

ahol μ_0 a vákuum mágneses permeabilitása, \mathbf{j} pedig az áramsűrűség vektora. Tetszőleges, differenciálható \mathbf{v} vektormezőre a Stokes-tétel állítása a következő:

$$\oint_g \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_S (\text{rot } \mathbf{v}) \, d\mathbf{F},$$

ahol a g peremgörbe irányítása jobbcsvart alkot az S nyílt felület irányításával. Alkalmazzuk a fenti matematikai tételt $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ helyettesítéssel:

$$\oint_g \mathbf{B} \, d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \, d\mathbf{F}.$$

A jobb oldalon az áramsűrűség felületi integrálja jelent meg, amely a g görbén átfolyó I áramok összegével egyenlő:

$$\oint_g \mathbf{B} \, d\mathbf{r} = \mu_0 \sum I.$$

Ez tehát a gerjesztési törvény szokásos alakja a fent definiált esetben. Szavakban: a \mathbf{B} vektormező zárt g görbére vett görbe menti integrálja egyenlő a görbén átfolyó áramok összegével szorozva a mágneses permeabilitással.

Alkalmazzuk most a Stokes-tételt a $\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$ összefüggésre $\mathbf{A} = \mathbf{v}$ helyettesítéssel:

$$\oint_g \mathbf{A} \, d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{B} \, d\mathbf{F}.$$

A jobb oldalon levő felületi integrál a Φ mágneses fluxus. Az egyenlet így írható:

$$\oint_g \mathbf{A} \, d\mathbf{r} = \sum \Phi.$$

Szavakban: az \mathbf{A} vektorpotenciál zárt g görbére vett görbe menti integrálja egyenlő a görbén átfolyó összes mágneses fluxussal.

Erőteljes párhuzam található a két egyenlet között. Egy görbén átfolyó áram maga körül mágneses örvényteret kelt (gerjesztési törvény, 1. ábra), míg egy görbén átfolyó mágneses fluxus maga körül vektorpotenciál örvényteret kelt (2. ábra).

Tekintsük a második Maxwell-egyenletet:

$$\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

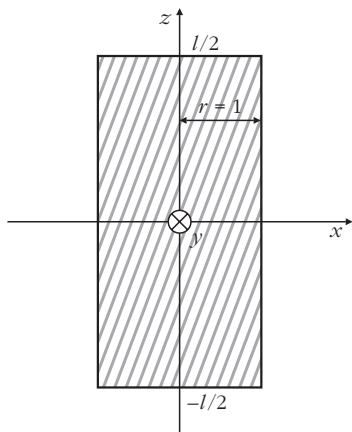
Ez az indukciótörvény néven ismert összefüggés. Helyettesítsük be a vektorpotenciál definíciós egyenletét:

$$\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \mathbf{A}).$$

Átalakítva:

$$\text{rot} \mathbf{E} = \text{rot} \left(- \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right).$$

A rotációk egyenlőségéből természetesen nem következik azonnal az argumentumok egyenlősége, csupán az, hogy egy skalármező gradiensének erejéig különbözhetnek egymástól, mivel $\text{rot}(\text{grad} U) \equiv 0$, ahogy azt korábban említettük. Esetünkben ezt a gradiens-



3. ábra. A szolenoid metszete. Forgástengelye a z tengely, míg x és y a forgástengelyre merőleges síkot képez.

mezőt nullának tekintjük, és az alábbi összefüggést fogadjuk el:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Vagyis a vektorpotenciál időbeli változása hozza létre az indukált elektromos mezőt.

Felmerülhet a kérdés, hogy mágneses vektorpotenciál csupán egy számítástechnikai segédlet, amely alkalmazásával a harmadik Maxwell-egyenlet elegánsan kiküszöbölhető, vagy pedig egy valós fizikai vektormező, amelynek időbeli megváltozása kelti az indukált elektromos teret? E kérdésre hosszú ideig nem volt egyértelmű válasz, mivel egyenáramú gerjesztéssel létrehozott mágneses vektorpotenciál nem volt kimutatható az elektromos kísérletek körébe tartozó klasszikus eszközökkel. Áttörést jelentett az Aharonov–Bohm-hatás kísérleti igazolása, amelyben kvantummechanikai effektus révén sikerült kísérletileg bizonyítani az egyenáramú gerjesztéssel létrehozott mágneses vektorpotenciál létezését.

A bevezetőben említettük, hogy a szolenoid- és toroidtekercsek kívül nincsen, pontosabban elhanyagolható a mágneses tér. Ezt az állítást tapasztalati tényként szokás elfogadni, viszont valaminek a nemléte a természettudományokban igen kérdéses, mivel a logaritmikus skálának nincsen nulla pontja. Határozzuk meg tehát a szolenoid- és toroidtekercs külső és belső \mathbf{A} és \mathbf{B} terét teljes általánosságban, numerikus integrálás segítségével. Így megtudhatjuk, hogy az elhanyagolás mennyire jogos.

A munkamódszer mindkét esetben a vektoriális Poisson-egyenlet megoldásával kezdődik.

$$\Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

Igazolható hogy ennek megoldása a következő:

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{v} - \mathbf{l}|} dV,$$

ahol \mathbf{v} helyvektor a futópont, míg \mathbf{l} helyvektor a gerjesztés koordinátái. A $|\mathbf{v} - \mathbf{l}|$ kifejezés tehát a gerjesz-

tési pont és a futó pont távolsága. Az így, integrálalakban előállított \mathbf{A} vektormezőt rotációképzésnek vetjük alá, amelyből megkapjuk a \mathbf{B} vektormezőt.

Az általános integrálképlet rotációképzés után egyébként az ismert Biot-Savart-törvényt adja, ennek direkt használata azonban jóval körülményesebb, ezért nem ezt az utat választjuk.

A fenti integrálban előforduló $\mathbf{j} dV$ kifejezés vezetékben folyó áram esetében $I d\mathbf{l}$ formában írható, ahol I a vezetékben folyó áram. Így a térfogati integrál a vezeték mentén haladó görbe menti integrál formájában számítható.

A szolenoid mágneses vektorpotenciál (\mathbf{A}) és mágneses indukció (\mathbf{B}) terének számítása

A teljesen részletes számítás a honlapon található.

A szolenoid metszete a 3. ábrán látható. A nemnulla komponenseket az alábbiakban foglaljuk össze azzal a kiegészítéssel, hogy a nullával osztás megelőzése okán bevezetjük a δ huzalvastagságot:

$$\frac{A_y(x, z)}{A_{\max}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{D} + \delta} d\varphi \right) d\eta,$$

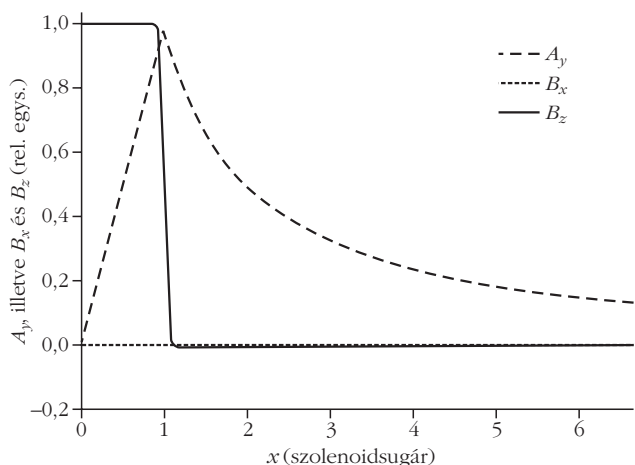
$$\frac{B_x(x, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z - \eta) \cos\varphi}{(\sqrt{D} + \delta)^3} d\varphi \right] d\eta,$$

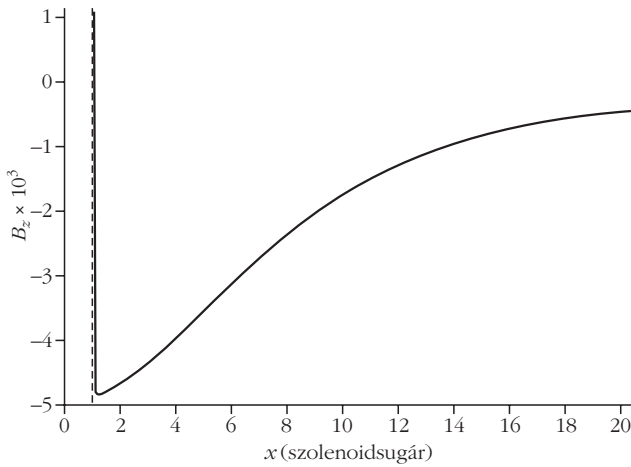
$$\frac{B_z(x, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r - x \cos\varphi}{(\sqrt{D} + \delta)^3} d\varphi \right] d\eta.$$

A numerikus számításoknál (4. és 5. ábra) a következő paramétereket alkalmaztuk: a szolenoid sugara az egység $r = 1$, hossza $l = 20$, huzalvastagság $\delta = 10^{-2}$.

Vegyük észre, hogy a szolenoidon kívül ellentétes irányú a B_z tér, mivel az erővonalak körbezáródnak!

4. ábra. A_y , B_x és B_z komponensek az x pozíció függvényében $z = 0$ helyen (a szolenoid közepén).





5. ábra. B_z komponens a szolenoidon kívül, az x pozíció függvényében ezerszeres nagyításban $z = 0$ helyen (a szolenoid közepén).

Ami a tekercs belsejében felfelé haladt az kívül lefelé mutat. A tér körülbelül a tekercs hosszának megfelelő távolságban elhanyagolható mértékűre csökken.

A toroid mágneses vektorpotenciál (\mathbf{A}) és mágneses indukció (\mathbf{B}) terének számítása

A teljesen részletes számítás a honlapon található.

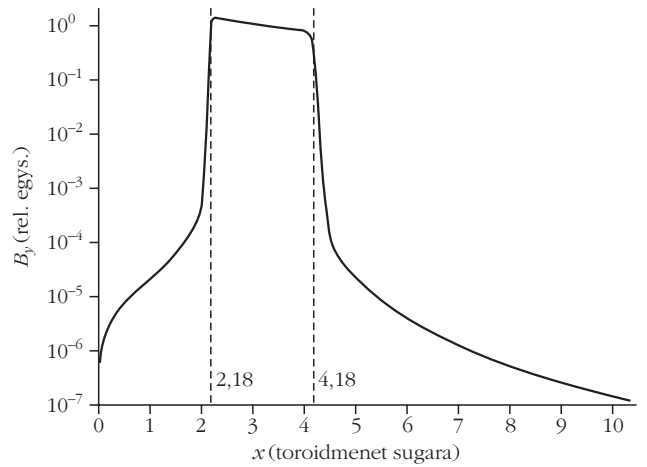
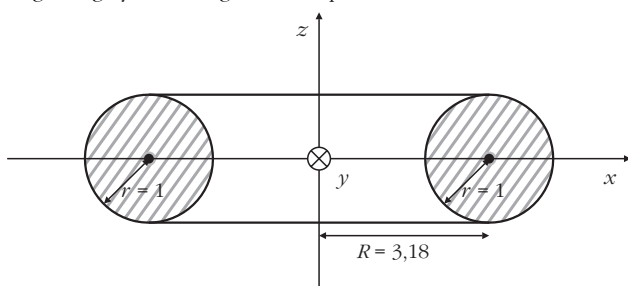
A toroid metszete a 6. ábrán látható. A nem-nulla komponenseket az alábbiakban összefoglaljuk azzal a kiegészítéssel, hogy a nullával osztás megelőzése okán bevezetjük a δ huzalvastagságot:

$$\frac{A_x(x, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin\varphi \cos\alpha}{\sqrt{D} + \delta} d\varphi \right) d\alpha,$$

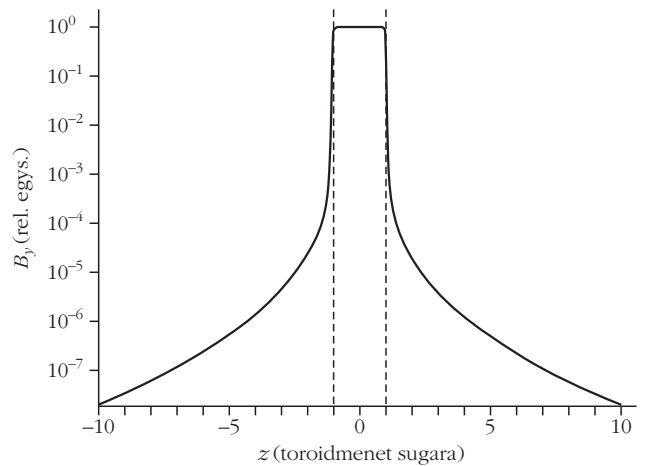
$$\frac{A_z(x, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{D} + \delta} d\varphi \right) d\alpha,$$

$$\begin{aligned} \frac{B_y(x, z)}{B_0} &= \\ &= \frac{rR}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\cos\varphi - (R\cos\varphi + r - z\sin\varphi)\cos\alpha}{(\sqrt{D} + \delta)^3} d\varphi \right) d\alpha. \end{aligned}$$

6. ábra. A toroid metszete. Forgástengelye a z tengely, míg x és y a forgástengelyre merőleges síkot képez.



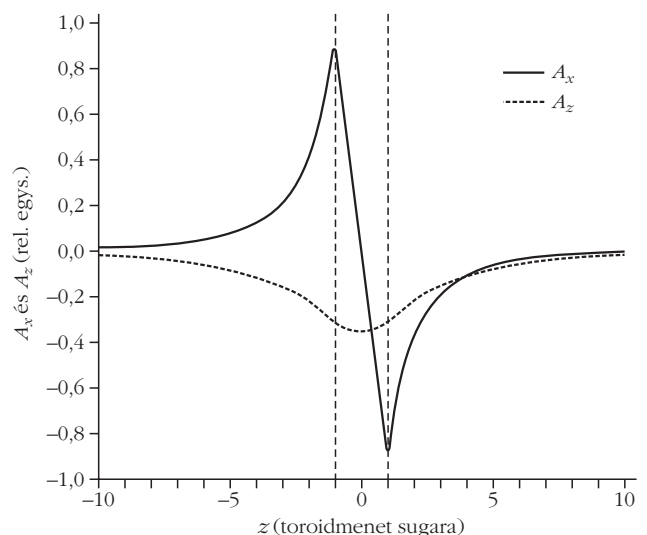
7. ábra. B_y komponens az x pozíció függvényében logaritmikus léptékben $z = 0$ helyen.



8. ábra. B_y komponens a z pozíció függvényében logaritmikus léptékben $x = 3,18$ helyen.

A numerikus számításoknál a következő paramétereket alkalmaztuk: a toroid meneteinek sugara az egység $r = 1$, a toroidalakzat rádiusza $R = 3,18$, (ez a R sugár éppen 20 kerületű tekercset eredményez, mint-

9. ábra. A_x és A_z komponensek z függvényében $x = 3,18$ helyen.



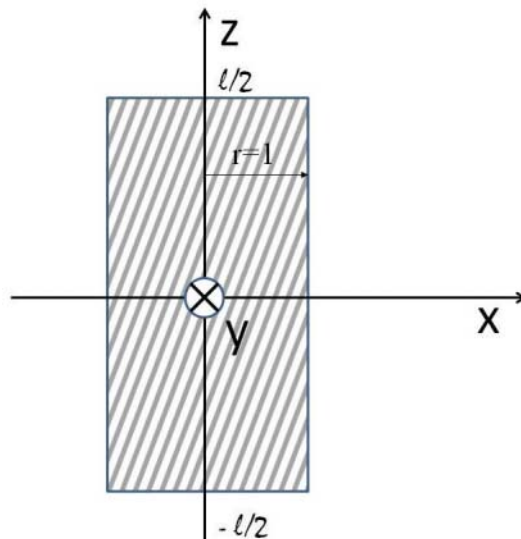
ha az előző számítás szolenoidtekercsét kör alakúvá hajlítottuk volna) továbbá a huzalvastagság $\delta = 10^{-2}$.

Vegyük észre, hogy a toroid belsejében a mágneses tér nem homogén (7. és 8. *ábra*). Kifelé haladva csökken, mivel a gerjesztési törvény szerint ugyanakkora gerjesztés jut egyre nagyobb kerületre. A tekercsen kívül a mágneses tér meredeken mintegy négy nagyságrendet csökken. A menetek középpontja $x = 3,18$ pozíciónál van.

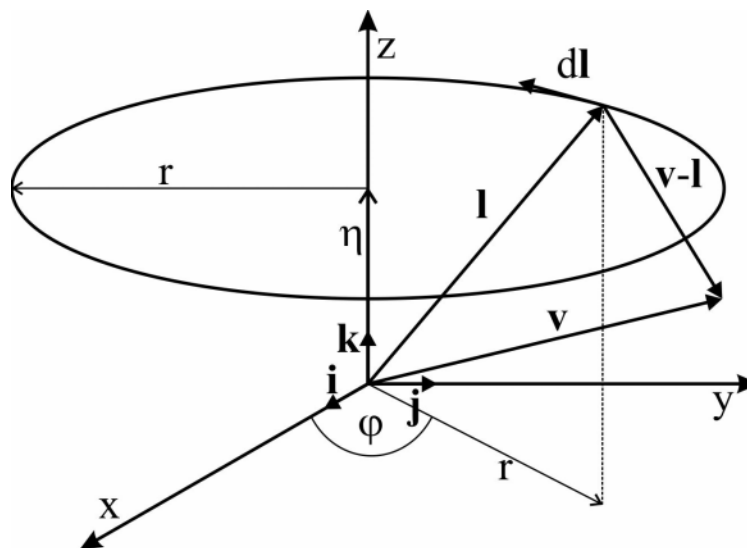
A tekercsen kívül a mágneses tér meredeken mintegy négy nagyságrendet csökken. A vektorpotenciálmező abszolút értéke viszont a tekercsen kívül összemérhető a tekercsen belüli értékkel (9. *ábra*). Az indukált feszültség forrása tehát semmiképpen nem lehet a mágneses tér, csak a vektorpotenciálmező. Ennek időbeli változása okozza tehát az indukált elektromos erőteret, amelynek zárt görbére vett integrálja az indukált örvényfeszültséget adja.

Hárs György, Varga Gábor – BME Fizikai Intézet
A mágneses vektorpotenciál, mint valóságosan létező vektormező
 – melléklet –

A szolenoid mágneses vektorpotenciál (**A**) terének és mágneses indukció (**B**) terének számítása:



A szolenoid metszete. Forgástengelye a z tengely, míg x és y a forgástengelyre merőleges síkot képez.



A vektorpotenciál teret a körvezetők terének integrálásával kapjuk.

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{v}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I^* d\mathbf{l}}{|\mathbf{v} - \mathbf{l}|}$$

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{l} = r \cos \varphi \mathbf{i} + r \sin \varphi \mathbf{j} + \eta \mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{l}}{d\varphi} = \mathbf{i}(-r \sin \varphi) + \mathbf{j}r \cos \varphi$$

$$d\mathbf{l} = [\mathbf{i}(-r \sin \varphi) + \mathbf{j}r \cos \varphi]d\varphi$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{l} = (x - r \cos \varphi)\mathbf{i} + (y - r \sin \varphi)\mathbf{j} + (z - \eta)\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{v} - \mathbf{l}|^2 = D = (x - r \cos \varphi)^2 + (y - r \sin \varphi)^2 + (z - \eta)^2 = x^2 + y^2 + (z - \eta)^2 + r^2 - 2r(x \cos \varphi + y \sin \varphi)$$

$$D = x^2 + y^2 + (z - \eta)^2 + r^2 - 2r(x \cos \varphi + y \sin \varphi)$$

$$\mathbf{A}^*(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I^* d\mathbf{l}}{\sqrt{D}}$$

$$\mathbf{A}^*(x, y, z) = \frac{\mu_0 I^*}{4\pi} \left(\mathbf{i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-r \sin \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi + \mathbf{j} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right)$$

$$I^* = \frac{NI}{l} d\eta$$

$$d\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0 NI}{4\pi l} d\eta \left(\mathbf{i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-r \sin \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi + \mathbf{j} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right)$$

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0 NI}{4\pi l} r \left[\mathbf{i} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\eta + \mathbf{j} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\eta \right]$$

$$A_{\max} = \mu_0 \frac{NI}{l} \frac{r}{2}$$

$$\frac{\mathbf{A}(x, y, z)}{A_{\max}} = \frac{1}{2\pi} \left[\mathbf{i} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\eta + \mathbf{j} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\eta \right]$$

Komponensek szerint:

$$\frac{A_x(x, y, z)}{A_{\max}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\eta$$

$$\frac{A_y(x, y, z)}{A_{\max}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\eta$$

Forgásszimmetria miatt x, z sík metszetet vizsgálunk. Itt $y = 0$

$$D = x^2 + (z - \eta)^2 + r^2 - 2rx \cos \varphi \quad \text{páros fv}$$

$$\frac{A_x(x, z)}{A_{\max}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\eta \quad \text{Az integrandus páratlan fv} \quad A_x(x, z) = 0$$

$$\frac{A_y(x, z)}{A_{\max}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\eta \quad \text{Az integrandus páros fv tehát} \quad A_y(x, z) \neq 0.$$

Általánosságban tehát:

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{A_{\max}}{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathbf{i} \frac{-\sin \varphi}{\sqrt{D}} + \mathbf{j} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) d\varphi \right] d\eta$$

A mágneses indukció vektorát a mágneses vektorpotenciál rotációjaként kapjuk:

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{A_{\max}}{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \text{rot} \left(\mathbf{i} \frac{-\sin \varphi}{\sqrt{D}} + \mathbf{j} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) d\varphi \right] d\eta$$

Vizsgáljuk az integrandus vektort!

$$\text{rot} \left(\mathbf{i} \frac{-\sin \varphi}{\sqrt{D}} + \mathbf{j} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\sin \varphi}{\sqrt{D}} & \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) - \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{D}} \right) + \mathbf{k} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{D}} \right) \right]$$

Az \mathbf{i} komponens:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) = -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} \left(D^{-1/2} \right) = -\cos \varphi \left(-\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} \frac{\partial D}{\partial z} = \cos \varphi \left(\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} 2(z - \eta) = \frac{(z - \eta) \cos \varphi}{D^{3/2}}$$

Felhasználtuk, hogy: $\frac{\partial D}{\partial z} = 2(z - \eta).$

A **j** komponens:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{D}} \right) = -\sin \varphi \frac{\partial}{\partial z} \left(D^{-1/2} \right) = -\sin \varphi \left(-\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} \frac{\partial D}{\partial z} = \sin \varphi \left(\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} 2(z - \eta) = \frac{(z - \eta) \sin \varphi}{D^{3/2}}$$

Felhasználtuk, hogy: $\frac{\partial D}{\partial z} = 2(z - \eta)$

A **k** komponens első tagja:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) = \cos \varphi \left(-\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} \frac{\partial D}{\partial x} = -\frac{1}{2} \cos \varphi D^{-3/2} 2(x - r \cos \varphi) = -\frac{(x - r \cos \varphi) \cos \varphi}{D^{3/2}}$$

Felhasználtuk, hogy $\frac{\partial D}{\partial x} = 2(x - r \cos \varphi)$

A **k** komponens második tagja:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{D}} \right) = \sin \varphi \left(-\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} \frac{\partial D}{\partial y} = -\frac{1}{2} \sin \varphi D^{-3/2} 2(y - r \sin \varphi) = -\frac{(y - r \sin \varphi) \sin \varphi}{D^{3/2}}$$

Felhasználtuk, hogy $\frac{\partial D}{\partial y} = 2(y - r \sin \varphi)$

A **k** komponens két tagja összevonva:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{D}} \right) = \frac{1}{D^{3/2}} (-x \cos \varphi + r \cos^2 \varphi - y \sin \varphi + r \sin^2 \varphi) = \frac{r - x \cos \varphi - y \sin \varphi}{D^{3/2}}$$

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{A_{\max}}{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathbf{i} \frac{(z - \eta) \cos \varphi}{D^{3/2}} + \mathbf{j} \frac{(z - \eta) \sin \varphi}{D^{3/2}} + \mathbf{k} \frac{r - x \cos \varphi - y \sin \varphi}{D^{3/2}} \right) d\varphi \right] d\eta$$

$$A_{\max} = \mu_0 \frac{NI}{l} \frac{r}{2}$$

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{NI}{l} r \int_{-l/2}^{l/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathbf{i} \frac{(z - \eta) \cos \varphi}{D^{3/2}} + \mathbf{j} \frac{(z - \eta) \sin \varphi}{D^{3/2}} + \mathbf{k} \frac{r - x \cos \varphi - y \sin \varphi}{D^{3/2}} \right) d\varphi \right] d\eta$$

$$B_0 = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{B_0}{4\pi} r \int_{-1/2}^{1/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathbf{i} \frac{(z-\eta)\cos\varphi}{D^{3/2}} + \mathbf{j} \frac{(z-\eta)\sin\varphi}{D^{3/2}} + \mathbf{k} \frac{r-x\cos\varphi-y\sin\varphi}{D^{3/2}} \right) d\varphi \right] d\eta$$

$$\frac{\mathbf{B}(x, y, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathbf{i} \frac{(z-\eta)\cos\varphi}{D^{3/2}} + \mathbf{j} \frac{(z-\eta)\sin\varphi}{D^{3/2}} + \mathbf{k} \frac{r-x\cos\varphi-y\sin\varphi}{D^{3/2}} \right) d\varphi \right] d\eta$$

$$\frac{B_x(x, y, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z-\eta)\cos\varphi}{D^{3/2}} d\varphi \right] d\eta$$

$$\frac{B_y(x, y, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z-\eta)\sin\varphi}{D^{3/2}} d\varphi \right] d\eta$$

$$\frac{B_z(x, y, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r-x\cos\varphi-y\sin\varphi}{D^{3/2}} d\varphi \right] d\eta$$

$$D = x^2 + y^2 + (z-\eta)^2 + r^2 - 2r(x\cos\varphi + y\sin\varphi)$$

Forgásszimmetria miatt x, z sík metszetet vizsgálunk. Itt $y = 0$

$$D = x^2 + (z-\eta)^2 + r^2 - 2rx\cos\varphi \quad \text{Ez páros fv } \varphi\text{-ben.}$$

$$\frac{B_x(x, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z-\eta)\cos\varphi}{D^{3/2}} d\varphi \right] d\eta \quad \text{Az integrandus páros fv } \varphi\text{-ben tehát } B_x(x, z) \neq 0$$

$$\frac{B_y(x, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z-\eta)\sin\varphi}{D^{3/2}} d\varphi \right] d\eta \quad \text{Az integrandus páratlan fv } \varphi\text{-ben } B_y(x, z) = 0$$

$$\frac{B_z(x, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r-x\cos\varphi}{D^{3/2}} d\varphi \right] d\eta \quad \text{Az integrandus páros fv } \varphi\text{-ben tehát } B_z(x, z) \neq 0$$

A nem nulla komponenseket az alábbiakban összefoglaljuk azzal a kiegészítéssel, hogy a nullával osztás megelőzése okán bevezetjük a δ huzalvastagságot.

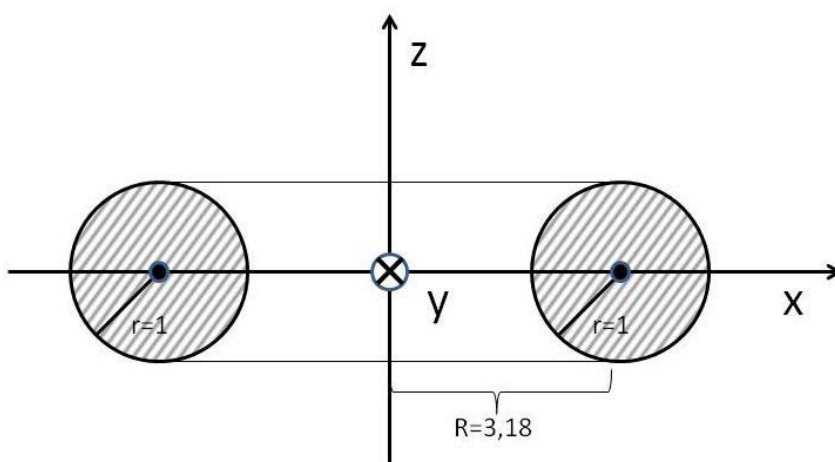
$$\frac{A_y(x, z)}{A_{\max}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{D+\delta}} d\varphi \right) d\eta$$

$$\frac{B_x(x, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z - \eta) \cos \varphi}{(\sqrt{D} + \delta)^3} d\varphi \right] d\eta$$

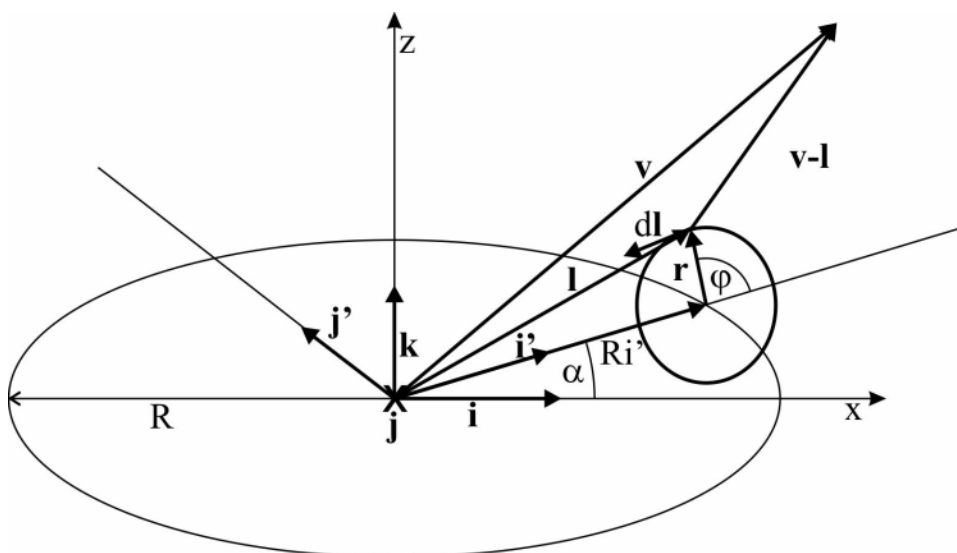
$$\frac{B_z(x, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r - x \cos \varphi}{(\sqrt{D} + \delta)^3} d\varphi \right] d\eta$$

A numerikus számításoknál a következő paramétereket alkalmaztuk:
 A szolenoid rádiusza az egység $r = 1$, hossza $l = 20$, huzalvastagság $\delta = 10^{-2}$.

A toroid mágneses vektorpotenciál (**A**) terének és mágneses indukció (**B**) terének számítása:



A toroid metszete. Forgástengelye a z tengely, míg x és y a forgástengelyre merőleges síkot képez



$$\mathbf{A}^*(\mathbf{v}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I^* d\mathbf{l}}{|\mathbf{v} - \mathbf{l}|}$$

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{i} \cos(90^\circ + \alpha) + \mathbf{j} \sin(90^\circ + \alpha) = \mathbf{i}(-\sin \alpha) + \mathbf{j} \cos \alpha$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}' r \cos \varphi + \mathbf{k} r \sin \varphi = r \cos \varphi (\mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha) + \mathbf{k} r \sin \varphi = \mathbf{i} r \cos \varphi \cos \alpha + \mathbf{j} r \cos \varphi \sin \alpha + \mathbf{k} r \sin \varphi$$

$$\mathbf{l} = R\mathbf{i}' + \mathbf{r} = R\mathbf{i} \cos \alpha + R\mathbf{j} \sin \alpha + \mathbf{i} r \cos \varphi \cos \alpha + \mathbf{j} r \cos \varphi \sin \alpha + \mathbf{k} r \sin \varphi$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{i}(R \cos \alpha + r \cos \varphi \cos \alpha) + \mathbf{j}(R \sin \alpha + r \cos \varphi \sin \alpha) + \mathbf{k} r \sin \varphi$$

$$\frac{d\mathbf{l}}{d\varphi} = \mathbf{i}(-r \sin \varphi \cos \alpha) + \mathbf{j}(-r \sin \varphi \sin \alpha) + \mathbf{k} r \cos \varphi$$

$$d\mathbf{l} = [\mathbf{i}(-r \sin \varphi \cos \alpha) + \mathbf{j}(-r \sin \varphi \sin \alpha) + \mathbf{k} r \cos \varphi] d\varphi$$

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{l} = (x - R \cos \alpha - r \cos \varphi \cos \alpha)\mathbf{i} + (y - R \sin \alpha - r \cos \varphi \sin \alpha)\mathbf{j} + (z - r \sin \varphi)\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{v} - \mathbf{l}|^2 = D = (x - R \cos \alpha - r \cos \varphi \cos \alpha)^2 + (y - R \sin \alpha - r \cos \varphi \sin \alpha)^2 + (z - r \sin \varphi)^2$$

A pitagoraszi összefüggés többszöri felhasználásával egyszerűbb alakra hozva:

$$D = x^2 + y^2 + z^2 + R^2 + r^2 - 2(Rx \cos \alpha + rx \cos \varphi \cos \alpha + Ry \sin \alpha + ry \cos \varphi \sin \alpha + rz \sin \varphi - Rr \cos \varphi)$$

$$\mathbf{A}^*(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I^* d\mathbf{l}}{\sqrt{D}}$$

$$I^* = \frac{NI}{2\pi} d\alpha$$

$$d\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{NI}{2\pi} d\alpha \left(\mathbf{i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-r \sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} d\varphi + \mathbf{j} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-r \sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} d\varphi + \mathbf{k} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right)$$

$$A_0 = \mu_0 \frac{NI}{2R\pi} \frac{r}{2}$$

$$\frac{d\mathbf{A}(x, y, z)}{A_0} = \frac{R}{2r\pi} \left(\mathbf{i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-r \sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} d\varphi + \mathbf{j} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-r \sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} d\varphi + \mathbf{k} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\alpha$$

$$\frac{\mathbf{A}(x, y, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathbf{i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} d\varphi + \mathbf{j} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} d\varphi + \mathbf{k} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\alpha$$

Komponensek szerint:

$$\frac{A_x(x, y, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\alpha$$

$$\frac{A_y(x, y, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\alpha$$

$$\frac{A_z(x, y, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\alpha$$

Forgásszimmetria miatt x, z sík metszetet vizsgálunk. Itt $y = 0$

$$D = x^2 + z^2 + R^2 + r^2 - 2(Rx \cos \alpha + rx \cos \varphi \cos \alpha + rz \sin \varphi - Rr \cos \varphi) \quad \alpha\text{-ban páros fv}$$

$$\frac{A_x(x, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\alpha \quad \text{Az integrandus } \alpha\text{-ban páros fv tehát } A_y(x, z) \neq 0$$

$$\frac{A_y(x, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\alpha \quad \text{Az integrandus } \alpha\text{-ban páratlan fv } A_x(x, z) = 0$$

$$\frac{A_z(x, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\alpha \quad \text{Az integrandus } \alpha\text{-ban páros fv tehát } A_y(x, z) \neq 0$$

Általánosságban tehát:

$$\mathbf{A}(x, y, z) = A_0 \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathbf{i} \frac{-\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{j} \frac{-\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{k} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) d\varphi \right] d\alpha$$

$$A_0 = \mu_0 \frac{NI}{2R\pi} \frac{r}{2}$$

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \mu_0 \frac{NI}{2R\pi} \frac{r}{2} \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathbf{i} \frac{-\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{j} \frac{-\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{k} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) d\varphi \right] d\alpha$$

$$B_o = \mu_0 \frac{NI}{2R\pi}$$

$$\mathbf{A}(x, y, z) = B_o \frac{rR}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathbf{i} \frac{-\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{j} \frac{-\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{k} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) d\varphi \right] d\alpha$$

A mágneses indukció vektorát a mágneses vektorpotenciál rotációjaként kapjuk

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{B}(x, y, z) = B_0 \frac{rR}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{rot} \left(\mathbf{i} \frac{-\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{j} \frac{-\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{k} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) d\varphi \Big] d\alpha$$

Vizsgáljuk az integrandus vektort.

$$\text{rot} \left(\mathbf{i} \frac{-\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{j} \frac{-\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{k} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} & \frac{-\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} & \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \end{vmatrix} =$$

Az alábbiakban felhasználjuk a következő három összefüggést:

$$\frac{\partial D}{\partial x} = 2(x - R \cos \alpha - r \cos \varphi \cos \alpha)$$

$$\frac{\partial D}{\partial y} = 2(y - R \sin \alpha - r \cos \varphi \sin \alpha)$$

$$\frac{\partial D}{\partial z} = 2(z - r \sin \varphi)$$

Az \mathbf{i} komponens:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} \right)$$

Kifejtve:

$$\begin{aligned} & \cos \varphi \left(-\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} \frac{\partial D}{\partial y} + \sin \varphi \sin \alpha \left(-\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} \frac{\partial D}{\partial z} = \\ & = \cos \varphi \left(-\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} 2(y - R \sin \alpha - r \cos \varphi \sin \alpha) + \sin \varphi \sin \alpha \left(-\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} 2(z - r \sin \varphi) = \\ & = -\frac{\cos \varphi (y - R \sin \alpha - r \cos \varphi \sin \alpha) + \sin \varphi \sin \alpha (z - r \sin \varphi)}{D^{3/2}} = \\ & = \frac{-y \cos \varphi + (R \cos \varphi + r - z \sin \varphi) \sin \alpha}{D^{3/2}} \end{aligned}$$

A **j** komponens:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} \right) =$$

Kifejtve:

$$\begin{aligned} & -\cos \varphi \left(-\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} \frac{\partial D}{\partial x} - \sin \varphi \cos \alpha \left(-\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} \frac{\partial D}{\partial z} = \\ & = -\cos \varphi \left(-\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} 2(x - R \cos \alpha - r \cos \varphi \cos \alpha) - \sin \varphi \cos \alpha \left(-\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} 2(z - r \sin \varphi) = \\ & = \frac{\cos \varphi (x - R \cos \alpha - r \cos \varphi \cos \alpha) + \sin \varphi \cos \alpha (z - r \sin \varphi)}{D^{3/2}} = \\ & = \frac{x \cos \varphi - (R \cos \varphi + r - z \sin \varphi) \cos \alpha}{D^{3/2}} \end{aligned}$$

A **k** komponens:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} \right) =$$

Kifejtve:

$$\begin{aligned} & -\sin \varphi \sin \alpha \left(-\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} \frac{\partial D}{\partial x} + \sin \varphi \cos \alpha \left(-\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} \frac{\partial D}{\partial y} = \\ & = -\sin \varphi \sin \alpha \left(-\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} 2(x - R \cos \alpha - r \cos \varphi \cos \alpha) + \sin \varphi \cos \alpha \left(-\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} 2(y - R \sin \alpha - r \cos \varphi \sin \alpha) = \\ & = \frac{\sin \varphi \sin \alpha (x - R \cos \alpha - r \cos \varphi \cos \alpha) - \sin \varphi \cos \alpha (y - R \sin \alpha - r \cos \varphi \sin \alpha)}{D^{3/2}} = \\ & = \frac{(y \cos \alpha - x \sin \alpha) \sin \varphi}{D^{3/2}} \end{aligned}$$

Behelyettesítjük a komponenseket:

$$\frac{B_x(x, y, z)}{B_0} = \frac{rR}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-y \cos \varphi + (R \cos \varphi + r - z \sin \varphi) \sin \alpha}{D^{3/2}} d\varphi \right) d\alpha$$

$$\frac{B_y(x, y, z)}{B_0} = \frac{rR}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \cos \varphi - (R \cos \varphi + r - z \sin \varphi) \cos \alpha}{D^{3/2}} d\varphi \right) d\alpha$$

$$\frac{B_z(x, y, z)}{B_0} = \frac{rR}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(y \cos \alpha - x \sin \alpha) \sin \varphi}{D^{3/2}} d\varphi \right) d\alpha$$

Forgásszimmetria miatt x, z sík metszetet vizsgálunk. Itt $y = 0$

$$D = x^2 + z^2 + R^2 + r^2 - 2(Rx \cos \alpha + rx \cos \varphi \cos \alpha + rz \sin \varphi - Rr \cos \varphi) \quad \alpha\text{-ban páros fv}$$

Az integrandus α -ban páratlan fv $B_x(x, z) = 0$

$$\frac{B_x(x, z)}{B_0} = \frac{rR}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(R \cos \varphi + r - z \sin \varphi) \sin \alpha}{D^{3/2}} d\varphi \right) d\alpha$$

Az integrandus α -ban páros fv tehát $B_y(x, z) \neq 0$

$$\frac{B_y(x, z)}{B_0} = \frac{rR}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \cos \varphi - (R \cos \varphi + r - z \sin \varphi) \cos \alpha}{D^{3/2}} d\varphi \right) d\alpha$$

Az integrandus α -ban páratlan fv tehát $B_z(x, z) = 0$

$$\frac{B_z(x, z)}{B_0} = \frac{rR}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-x \sin \alpha \sin \varphi}{D^{3/2}} d\varphi \right) d\alpha$$

A nem nulla komponenseket az alábbiakban összefoglaljuk azzal a kiegészítéssel, hogy a nullával osztás megelőzése okán bevezetjük a δ huzalvastagságot.

$$\frac{A_x(x, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D} + \delta} d\varphi \right) d\alpha$$

$$\frac{A_z(x, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D} + \delta} d\varphi \right) d\alpha$$

$$\frac{B_y(x, z)}{B_0} = \frac{rR}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \cos \varphi - (R \cos \varphi + r - z \sin \varphi) \cos \alpha}{(\sqrt{D} + \delta)^3} d\varphi \right) d\alpha$$

A numerikus számításoknál a következő paramétereket alkalmaztuk:

A toroid meneteinek rádiusza az egység $r = 1$, a toroid alakzat rádiusza $R = 3.18$, (ez a R rádiusz éppen 20 kerületű tekercset eredményez, mintha az előző számítás szolenoid tekercsét kör alakúvá hajlítottuk volna) továbbá a huzalvastagság $\delta = 10^{-2}$.