

ELŐSZÓ

A jegyzetet azoknak a hallgatóknak a figyelmébe ajánljuk, akik a Budapesti Műszaki Főiskola Kandó Kálmán Villamosmérnöki Karán a jegyzet címével megegyező tantárgyat vették fel. Az elektronikus megjelenési forma lehetőséget ad arra, hogy a jegyzetet a későbbiekben könnyen módosítani, bővíteni, illetve egyszerűsíteni lehessen.

Igyekeztünk a lehetőségeinkhez képest úgy illeszkedni a tantárgy tematikájához, hogy néhány alapvető ismeretet esetleg a szükségesnél mélyebben tárgyaljunk. Tettük ezt abban a hitben, hogy így a hallgatók részére feltárhatjuk a különböző témakörök kapcsolatát, és megalapozhatjuk a későbbiekben annyira lényeges mérnöki gondolkodás kialakulását.

A jegyzet megírásakor feltételeztük, hogy a hallgatók már rendelkeznek az Elméleti Villamoságtan és Elektronika tantárgyak által nyújtott ismeretekkel., bár néhány esetben megkíséreltük röviden összefoglalni az idevonatkozó részismereteket is.

Különösen az I. fejezet esetében, de a jegyzet egészében is bizonyosan előfordulnak olyan témakörök, melyeknek a jegyzet keretében történő tárgyalása az előadó szerint esetleg túlzottan nagy megterhelést jelenthet a hallgatókra. Jegyzetünk azonban csak keretet ad, melyből az előadó saját elképzelése szerint kiemelhet a hallgatók számára fontos részeket, míg a megítélése szerint kevésbé lényeges, vagy a hallgatók számára esetleg nehezebben elsajátítható problémák tárgyalását esetleg elhagyhatja.

Kiemelten foglalkozunk a szűrők tervezésével, a torzításokkal, (utóbbiakkal két külön fejezetben, az egyes fejezetek alaptémájának megfelelően), a zajokkal, az erősítővel (két külön fejezetben is) A jegyzet terjedelme azonban korlátozott, így egyes, általunk egyébként lényegesnek tartott témakörök tárgyalását mellőznünk kellett.

Hallgatóink gyakori panasza, hogy az egyes témakörökben valamilyen távoli hivatkozást szerepeltetünk (egyenletek), amihez a jegyzetet „lapozgatni” kell. Ezen a nehézségen úgy próbáltunk segíteni, hogy néhány esetben a szükséges egyenletet változatlan formában, és számozással megismételtük a hivatkozó helyen is.

A jegyzet a megszokottnál több ábrát tartalmaz. Evvel is szerettük volna érthetőbbé, talán nehezebben felejtetőbbé tenni az anyag kifejtését. A szokottnál gyakoribb lábjegyzetek az elektronikus forma előnyeit használják ki.

Az egyenleteket és az ábrákat fejezetenként számoztuk. (Az egyenletek levezetését nem számoztuk, csak a végeredményt). Az általunk lényegesnek vélt definícióknál, egyenleteknél az **NB** („nota bene” — „jól jegyezd meg” jelölést használtuk.

Ezúttal fejezzük ki köszönetünket *Dr. Lendvay Marianna PhD.* főiskolai tanárnak és *Lovassy Rita* főiskolai adjunktusnak, akik önzetlen segítségükkel támogatták e jegyzet megszületését, valamint *dr. Ujfalussy László* főiskolai docensnek és *Mihalik Gáspár* villamosmérnöknek, akik észrevételeikkel, javaslataikkal igen sokat segítettek munkánkban.

Kérjük, hogy észrevételeikkel, problémáikkal forduljanak egyenesen hozzánk, az alábbi címeken:

turmezei.peter@kvk.bmf.hu

paloc.peter@kvk.bmf.hu

A Szerzők

Analóg és hírközlési áramkörök

I. kötet

Tartalomjegyzék

I. fejezet Kommunikációelméleti alapok

1.1 Adat, üzenet, kommunikációs rendszer	6
1.2. A jel fogalma	10
1.3. Folytonos, mintavételezett és diszkrét jelek	11
1.4. Determinisztikus jelek osztályozása. Tipikus vizsgáló jelek	13
1.5. Az információ fogalma, meghatározása egyszerű és bonyolultabb esetekben	14
1.6. Csatornakapacitás ideális, és tényleges (zajos) csatorna esetén. Feltételes entrópia	19
1.7. Folytonos forrás, folytonos üzenet, folytonos csatorna információelmélete	21
Ellenőrző kérdések	27

II. fejezet A hálózatelmélet alapjai.

2.1. Lineáris és nemlineáris hálózatok	28
2.2. Áramköri elemek	28
2.2.1. Passzív áramköri elemek	29
2.2.2..Aktív áramköri alapelemek	30
2.3. Hálózat működésének elemzése (analízise) az időtartományban. Konvolúciós integrál, Duhamel-integrál	32
2.4. Hálózat működésének elemzése a frekvenciatartományban Komplex elektromos mennyiségek, idealizált modellekkel kapcsolatos összefüggések. Komplex hálózati jellemzők	34
2.5. Reális hálózati elemek helyettesítő képei az idealizált elemek kombinációjával	37
2.6. A hálózatjellemzők érzékenysége	40
2.6.1. Példa érzékenységek számítására	42
2.7. A hálózat alkotó elemeinek toleranciaparaméterei	43
Ellenőrző kérdések	45

III. fejezet Transzformációk. Átlépés az időtartományból a frekvencia-tartomány(ok)ba.

3.1. Fourier-transzformáció Vonalas spektrum	46
3.2. Aperiodikus jel Fourier-transzformációja. Folytonos spektrum	49
3.3. Lineáris hálózat által okozott jeltorzítások („Lineáris torzítások”)	52
3.4. Laplace-transzformáció. Komplex változó bevezetése	52
3.4.1. Egyszerű áramkörök átviteli függvényeinek elemzése. Első- és másodfokú alaptagok (RC áramkörök, rezgőkörök) átviteli függvényei	57
3.5. Inverz Laplace-transzformáció (Visszatérés az időtartományba)	60
3.6. A Laplace-transzformáció egyszerű alkalmazása: Másodfokú tag pólusainak és zérusainak függése az áramkörben szereplő modellek értékeitől	62
3.7. A Laplace-transzformáció eredményeinek alkalmazása a frekvencia-tartományban: Bode-diagramok	66
Ellenőrző kérdések	75
IV. fejezet Aktív hálózatok (erősítők). Aszimmetrikus bemenetű erősítők	
4.1. Alapismeretek, meghatározások	76
4.2. Az erősítők legfontosabb paraméterei	78
4.3. Erősítő kapcsolások nagyjelű viselkedése	79
4.3.1. Nemlineáris torzítások, bevezetés	80
4.3.2. A torzítási tényező (THD)	81
4.3.3. Intermodulációs torzítás	82
4.3.4. Differenciális torzítások	84
4.4. Alapkapcsolások összekapcsolása. Néhány lánckombináció	85
4.5. Teljesítményerősítők	87
4.5.1. A félvezetők határadatai	87
4.5.2. Hatásfok számítása együtemű végfokozatoknál	90
4.6. Ellenütemű kapcsolású végfokozatok	90
4.6.1. Ellenütemű végerősítő kapcsolások	92
4.6.2. A osztályú ellenütemű végfokozat elemzése	93
4.6.3. B osztályú ellenütemű végfokozat elemzése	94
4.7. Visszacsatolás használata és hatása aktív hálózatoknál	96
4.7.1. Visszacsatolt rendszerekben fellépő specifikus torzítások	101
4.7.2. Egyszerű kivitelű negatív visszacsatolás diszkrét elemeket tartalmazó erősítőkben	102
Ellenőrző kérdések	105

V. fejezet Erősítők. Szimmetrikus erősítők.

5.1. A szimmetrikus erősítők sajátosságai	106
5.2. Szimmetrikus műveleti erősítő ekvivalens modellje. Szimmetrikus és közös gerjesztés és kimenet. Szimmetrikus és közös üresjárású átviteli függvények	107
5.3. Aszimmetrikus kimenetű erősítő modellje, üresjárású átviteli függvénye	111
5.4. A szimmetrikus erősítők bemenő- és kimenő impedanciái	111
5.5. Differenciál erősítők	113
5.5.1. A differenciális erősítő lineáris (kisjelű) tulajdonságai	114
5.5.2. Differenciál erősítők nagyjelű (nemlineáris) tulajdonságai	115
5.5.3. Visszacsatolás hatása differenciál erősítőknél	117
5.6. Műveleti erősítők	118
5.6.1. A műveleti erősítők jellemző paraméterei: A(s), határfrekvencia, slew-rate, offset	120
5.6.2. A műveleti erősítők felépítése	122
5.6.2.1. Bemeneti fokozat	123
5.6.2.2. Asszimmetrizáló fokozat	123
5.6.2.3. Áramgenerátorok kivitelezése műveleti erősítőknél	126
5.6.2.4. Szinteltoló fokozat	126
5.6.2.5. Végfokozatok	127
5.7. Visszacsatolt műveleti erősítők	128
5.7.1. Visszacsatolt műveleti erősítők alapkioscsolásai. Aszimmetrikus bemenetű alapkioscsolások	128
5.7.2. Visszacsatolt műveleti erősítők alapkioscsolásai Szimmetrikus bemenetű alapkioscsolások	131
5.7.3. Visszacsatolt erősítők átviteli függvényei (amplitúdó-és fázisátvitel a képzetes frekvencia függvényében)	132
5.7.4. Frekvenciafüggő visszacsatolás alkalmazási példa: Műveleti erősítő integráló fokozat	136
Ellenőrző kérdések	138

VI. fejezet Szűrők.

6.1. Alapismeretek, meghatározások	139
6.2. A szűrőkhöz fűződő átviteli követelmények közelítése (approximációja) különböző átviteli függvényekkel. A szűrők alapsaládjai	140
6.3. Kritikus csillapítású szűrők	144

6.4. Bessel-féle szűrő	146
6.5. Butterworth-(max. laposságú, „maxlap”) szűrő	148
6.6. Csebysev-szűrők	152
6.7. Felüláteresztő szűrők átviteli függvénye	157
6.8. Sávszűrők átviteli függvényének származtatása az aluláteresztő szűrő átviteli függvényéből	160
6.9. Kaszkád és aktív szűrők szintézise	162
6.9.1. Kaszkád szűrők	162
6.9.2. Aktív szűrőtagok	165
6.10. Példa aluláteresztő szűrő tervezésére (analízis és szintézis)	170
6.10.1. A szűrő fokszámának és a ω_3 értéknek számítása	171
6.10.2. Az egyes tagok körjóságának számítása	172
6.10.3. A szűrőkapcsolás megtervezése	172
Ellenőrző kérdések	174
VII. fejezet Zajok	
7.1. Alapfogalmak	175
7.2. Sztochasztikus jelek jellemzői	176
7.2.1. Sztochasztikus jelek statisztikai jellemzői	176
7.2.2.. Sztochasztikus jelek spektrális jellemzői	179
7.3. Zajforrások	181
7.4. A zaj-sávszélesség fogalma	183
7.5. Erősítők zaja	183
7.5.1. Az erősítő saját zajának modellezése	183
7.5.2. Zajszám, zajtényező (Noise figure, noise factor)	185
7.5.3. Kaszkád kapcsolású négyfókusok (erősítők, vagy passzív hálózatok) eredő zajszáma	188
Ellenőrző kérdések	190
Irodalomjegyzék	191

I. fejezet

Kommunikációelméleti alapok

1.1 Adat, üzenet, kommunikációs rendszer

Általános értelemben az *olyan mennyiségértéket, logikai értéket, vagy ezek formájában kódolt értékeket nevezünk adatnak*, amit valamilyen más tényezőhöz hozzá lehet rendelni. Az adatoknak valamilyen formában rendezett összességét *adatbázisnak* szokás nevezni.

Az adatbázis (data base) egyik formája az adatfolyam, (data flow) ahol az adatok közös forrásból származnak, de egyesével, vagy csoportosan időben egymást követik.

Üzenet: Olyan továbbítható adatbázis, (vagy adatbázis-halmaz), mely az erre a célra szolgáló un. kommunikációs csatornában adatfolyamként¹ továbbításra kerül.

Üzenet csak adatokat tartalmazhat².

Az üzenetet szokás dimenzió szerint csoportosítani. (idő, tér). Üzenet lehet egy nyomtatott sor (mielőtt adatfolyammá alakítjuk), lehet egy kép. Mind idő— mind térbeli dimenziója van egy mozgóképnek, stb.

Adatfolyam lehet két telefoncsengetés (megbeszélés szerint: otthon van a férjem, ne hívj fel) Üzenet egy fekete-fehér televíziós műsor által létrehozott adatbázis, ahol az adatok részben egymást követik (egy adott ponton), jellemzően azonban a stúdió terében meghatározható x, y, z koordináták fényességi értékére utalnak.

Színes TV műsor esetén minden egyes ponton három adat keletkezik, melyek az egyes pontokra jellemző fényességi, színárnyalati, és színtelítettségi értékekkel állnak kapcsolatban. Mindkét esetben a fényességi adatfolyamot a kísérő hang adatfolyam-együttese egészíti ki. (gondoljunk a sztereo-adásra)

Az üzenet — továbbításra váró adatbázis. Az egyes adatok megfelelően feldolgozva *hírt* képeznek. A hírközlés az adatfeldolgozás során az adatbázist az adatfolyammá alakítja át. A hírre a *hírközlésben* jellemző az idődimenzió. A *hír* értelmezése esetünkben tehát *feldolgozott, adatfolyammá alakított adatbázis*.

¹ A hírközlési csatornák esetében adatfolyamként továbbítjuk az üzenetet, egyéb csatornák esetében is nehéz példát találni arra, hogy az adatbázist teljesen egyidejűleg (szimultán) továbbítaná a csatorna.

² Az üzenetrő hírközlési meghatározása esetén, azaz olyan üzenet esetében, melyet hírközlési csatornában kívánunk továbbítani..

A mindennapi életben, elsősorban az újságírás, pontosabban a média területén a hír fogalma fentiekől eltér, a matematikai kommunikációelmélet szerint a hírnek ki kell elégítenie még egy fontos kritériumot, mellyel az *1.5. pontban*, a *17. oldalon* fogunk foglalkozni.³

Az üzenet *elküldőjét forrásnak* nevezzük. (A forrás az információelmélet atyja, Claude Shannon⁴ szerint valamilyen személy; ma már ez inkább berendezés, vagy azok hatalmas rendszere, bár szinte minden esetben ma is behelyettesíthetjük személlyel, vagy személyekkel)

Az üzenetet jelváltó, adatfeldolgozó és kódoló egység villamos jelek⁵ együttesévé alakítja át. Az adó a jeleket csatornához illeszti (erősíti, megfelelő műveleteket végez vele) oly módon, hogy a hozzá kapcsolódó (esetünkben hírközlési) kommunikációs csatorna azt optimálisan továbbíthassa. A kommunikációs csatorna az adatok továbbítását végzi az adótól a vevőig. A csatorna lehet telefon-vezeték s a telefonközpont, hatalmas vezetékhalózat, a mikrohullámú csőátvonal, koaxiális kábel, a száloptika-vezeték, a földet körülvevő atmoszféra, a világűr, stb.,

Folytonos csatorna bemeneti és kimeneti jelei analóg jelek. (A kimeneti jel „zajos” csatorna esetén zajt is tartalmazó analóg jel)⁶.

Diszkrét csatorna diszkrét — az esetek többségében digitális formába kódolt —jeleket továbbít oly módon, hogy a csatorna felépítése a diszkrét jel továbbítására orientált.

A bemeneti adót, a kommunikációs csatornát és a vevőt együttesen kommunikációs rendszernek nevezzük. [A kommunikációs rendszer nemcsak elektronikus lehet. Lehet akusztikus (átkiabálok az utca túlsó oldalára), lehet egyszerű optikai (integetek a mennyasszonyomnak), ennek a tantárgynak a keretén belül azonban csak villamos elven felépített rendszerekkel foglalkozunk.]

A kommunikációs csatorna nem ideális, akár diszkrét, akár folytonos jelek⁴ továbbítására szolgál. A terjedés során az üzenet torzul, zavarok és zajok adódnak hozzá, ezt úgy vesszük figyelembe, hogy az ideális, zajmentes kommunikációs csatornát jelképező egységet egy

³ A **hír** köznapi meghatározása szerint olyan (mediában: ellenőrzött és igaznak bizonyult) üzenet, amely közérdeklődésre tarthat számot. (A hírrel szemben elvileg támasztott követelmény, hogy legyen rövid, tömör, világos és tárgyilagos. A hírnek általában hat kérdésre kell választ adnia: „Ki? Mikor? Hol? Mit? Hogyan? Miért?”. A hír a legrövidebb terjedelmű újságírói műfaj, és mint ilyen az összes objektív újságírói műfaj alapja.) A hír **sajátos üzenet**, a **hírügynökségek** és a **hírszerzés** áruja, a hírközlés, a kommunikáció és más szakterület tárgya.

A hír definíciója [William Randolph Hearst](#), az ismert amerikai sajtómágnás szerint úgy szól, hogy „hír az, amit valaki nagyon nem szeretne, ha nyomtatásban megjelenne. Ami azonban nem ilyen, és amit mégis publikálnak, az mind csak reklám.”

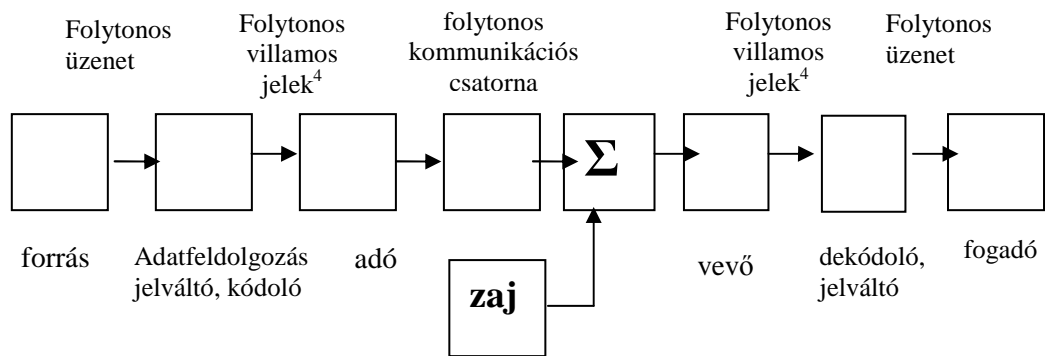
⁴ Claude Shannon (1916-2001), mérnök – matematikus, ő hozta kapcsolatba a Boole-algebra tételeit az elektronikus számítógépek működésével.

⁵ A jel fogalmával az 1.2. pont foglalkozik. (A hivatkozás a következő oldalra is vonatkozik.)

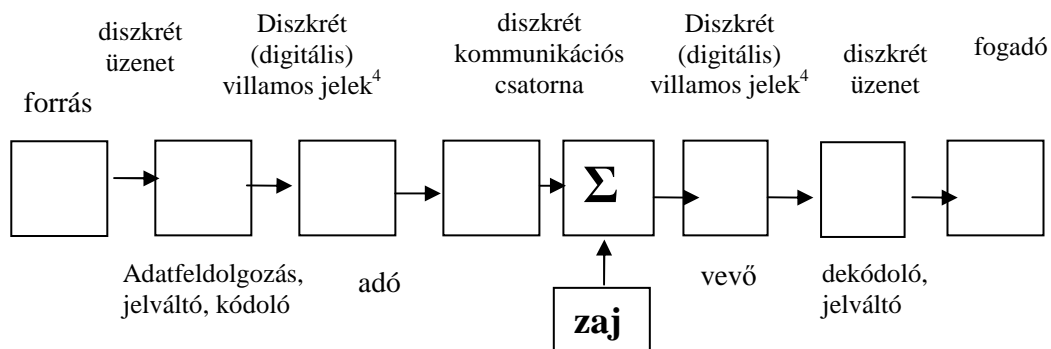
⁶ Folytonos csatorna diszkrét jeleket is továbbíthat, (pl. Morse ABC jelei hang segítségével), de ez általában nem célszerű.

összegző áramkörrel egészítjük ki, mely az üzenet vételénél problémákat okozó zavart, és zajt jeleníti meg. (Ez az egység természetesen fizikailag nem létezik.)

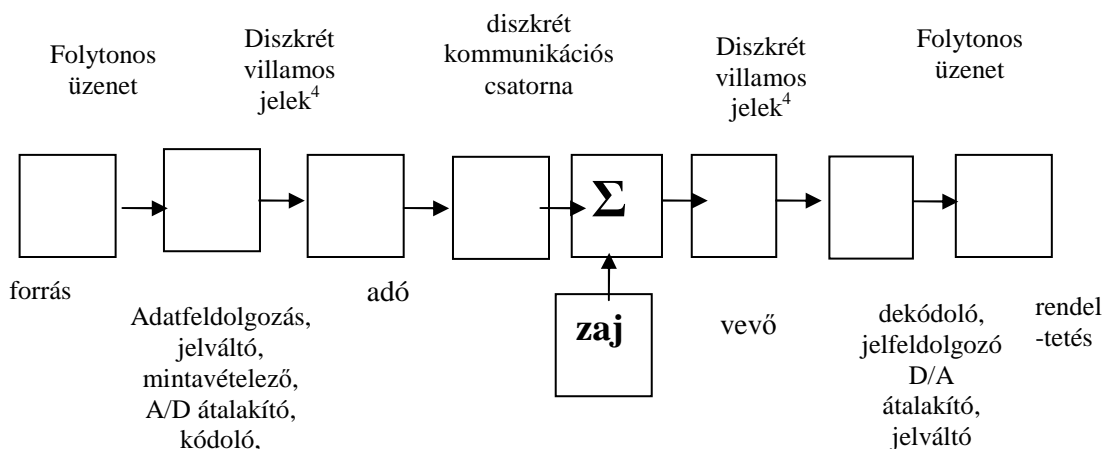
A vevő elvégzi a dekódolást, és elvileg visszaalakítja az üzenetet eredeti formájára. Vevő a táviró-egység vevője, a rádió- és TV készülék, stb.



1-1 ábra. Folytonos („analóg”) villamos kommunikációs rendszer



1-2. ábra. Diszkrét („digitális”) villamos kommunikációs rendszer



1-3. ábra. Hibrid villamos kommunikációs rendszer

A rendszer lehet zárt és nyílt.

Zárt rendszerek esetén az üzenetet csak meghatározott rendeltetés felé továbbítjuk (telefon), a nyílt rendszerek esetén az üzenethez való hozzáférés nem korlátozott.

Napjainkban a számítógépes hálózatok megjelenése után már beszélhetünk vegyes rendszerekről is. (Youtube, stb.) Ezeknél egyrészt az üzenet típusa, másrészt a továbbítás iránya határozza meg, hogy azt korlátozással, vagy elvileg korlátozás nélkül⁷ fogadhassuk.

Vizsgáljuk meg az üzenetfolyam fizikai állapotait az egyes egységek be- és kimenetén.

Az adatfolyam természetéből adódóan megkülönböztetünk folytonos (analóg) és diszkrét forrást.

Analóg adatfolyam esetén a továbbítandó adatok értéke „tetszőleges pontosságú” lehet (ha az egyes értékeket különböző szimbólumokkal helyettesítenénk, akkor elvileg a szimbólumok száma végtelen lenne), s az adatok időbeni változása folyamatos, azaz minden időponthoz hozzárendelhető legalább egy adat. Ugyanez mondható el az adatok hely szerinti megoszlásáról: A kiválasztott térfogaton belül valamennyi pontból származó adatot elvileg továbbítani kell. (Ezt a feladatot szerencsére ebben a formában nem kell megoldani.)

Diszkrét adatfolyam (egy feladott távirat) esetén az *adatfolyam szimbólumrendszere véges* (távirat esetén összesen 64 szimbólum), s az egyes szimbólumok továbbítása között is valamilyen (nem végtelenül kicsi) idő telik el.

Diszkrét adatfolyam esetén *nem lehet minden időpillanathoz egy feladott szimbólumot hozzárendelni.*

A hírközlés alapvető célja az, hogy a rendeltetési helyen a vett üzenet a forrás által elküldött üzenettel maximálisan egyezzen, (azaz a legkisebb üzenettorzulás és zaj lépjen fel), maximális csatornakihasználtság és a lehető leggazdaságosabban létrehozható adó- és vevőberendezés mellett.

Fentieket optimális jelátalakító-kódoló-dekódoló felhasználásával, és a fenti egységeknek a csatornához történő optimális illesztésével érik el.

A jel az adatfolyam elemeinek matematikai ábrázolása. Olyan függvény, melynek független változója (dimenziója) az idő, a függő változó pedig valamilyen fizikai mennyiség értéke.

(1.2. pont)

Jelváltókra néhány példa: TV-kamera, a mikrofon, a scanner, ill. hangszóró, a plazma-vagy akár klasszikus három-elektronágyús delta TV-képcső, a nyomtató, (utóbbiak a rendeltetés

⁷ Ide nem értve a regisztrációs, előfizetői stb. korlátozásokat, melyek nem műszaki természetűek.

oldalon alakítják vissza a villamos adatokat. a szükséges jellegű adatokká: hangnyomássá, optikai képpé, stb..

Kódolás alatt analóg jelek esetén azokat a műveleteket értjük, melyek a jelváltó által létrehozott elsődleges villamos értékeket a felhasznált eljárásnak megfelelően formálják. Nagyon egyszerű példánál maradva a kódoló hozza létre a klasszikus sztereo szabvány használata esetén a sztereo-jelet.

Az adó szerepe elsősorban a moduláció, erősítés, és szűrés. (A moduláció és szűrés fogalmával későbbiekben fogunk megismerkedni.)

A rendeltetés-oldalon található egységek áramköri felépítésüket tekintve rendszerint integráltak, ilyen például egy TV vevőkészülék.

1.2. A jel fogalma

Diszkrét rendszer esetén is hasznos, hibrid és folytonos rendszer esetén pedig kikerülhetetlen a *jel* terminológia bevezetése, (amúgy is triviális a jelentése)

A hírközlésben jelnek nevezzük azokat a függvényeket, melyek független változója (dimenziója) az idő, függő változója pedig valamilyen mérhető, értékelhető fizikai mennyiség. Megkülönböztetünk a kommunikációs csatornán átviendő „hasznos jelet”, (mely az üzenetre utal), gondokat okozó „zavart”, és egyszerűen zajokat. Ha jel-zaj viszonyról (S/N) beszélünk, mindig hasznos jel — (zaj + zavar) teljesítmény-arányt értünk alatta.⁸

Diszkrét üzenetfolyamot önmagában csak abban az esetben nevezzük jelnek, (mint később látni fogjuk: diszkrét jelnek), ha az üzenet szimbólumkészlete valamilyen önmagában is számszerű adat, valamilyen fizikai mennyiség. Ha a szimbólumok nem ilyen jellegűek, (például betűk), akkor diszkrét jelről csak a kódoló kimenetén beszélhetünk.

A jeleket két nagy csoportra oszthatjuk: Ismerünk *determinisztikus* és *sztochasztikus* jeleket.

A determinisztikus (más szóval előre meghatározható) jelek esetén a jel teljes egészében előre („a priori”) meghatározható, a jel matematikai formában teljes pontossággal ábrázolható. Jó példa erre az $y = \sin \omega t$ jel.

Sztochasztikus jel esetén a jel véletlenszerű, fellépése előtt a jel értéke *bizonytalan*, azaz a jel tényleges lefutása után ez a *bizonytalanság* szűnik meg, s válik információvá.

A jel lefutása előtt a jelről csupán statisztikai ismereteink vannak, azaz az előbbi értékek alapján van valószínűsége annak, hogy milyen értékek várhatók a jel tényleges lefutásakor.

⁸ Zajok forrásainak, jellegének, hatásának részletesebb elemzésére, a 6. fejezet vállalkozik.

Az 1.3. alfejezetben determinisztikus jelekkel, egyébként pedig az 1. fejezetben sztochasztikus jelekkel, és a jelek alapjául szolgáló üzenetekkel fogunk foglalkozni, .

1.3. Folytonos, mintavételezett és diszkrét jelek

Jelet akkor nevezünk folytonosnak⁹, ha mind értelmezési tartományán, mind pedig értékkészletén belül folytonos: a független változó szinguláris pontjainak kivételével az értelmezési tartományán belül valamennyi időpillanatnak megfeleltethető valamely fizikai mennyiség, mely az értékkészleten belül tetszőleges véges értéket felvehet.

Folytonos forrás és kommunikációs csatorna esetén folytonos jellel van dolgunk, melyet analóg berendezések segítségével dolgozunk fel. Folytonos az üzenet forrása, folytonos jellegű a jel kódolása (pl. két analóg jelnek az összegét és a különbségét adjuk tovább,) stb. Az adónak analóg jelet kell feldolgoznia, s a vevő is többnyire analóg áramkörökből épül fel.)¹⁰.

Analóg jelet könnyen átalakíthatunk mintavételezett, kvantált, vagy diszkrét jellé.

A mintavételezett jel úgy származtatható az analóg jelből, hogy annak értékét meghatározott időközönként rögzítjük. A jel alakja jellemző mind az eredeti analóg jelre, mind a mintavételező jelre. (1.4. ábra)

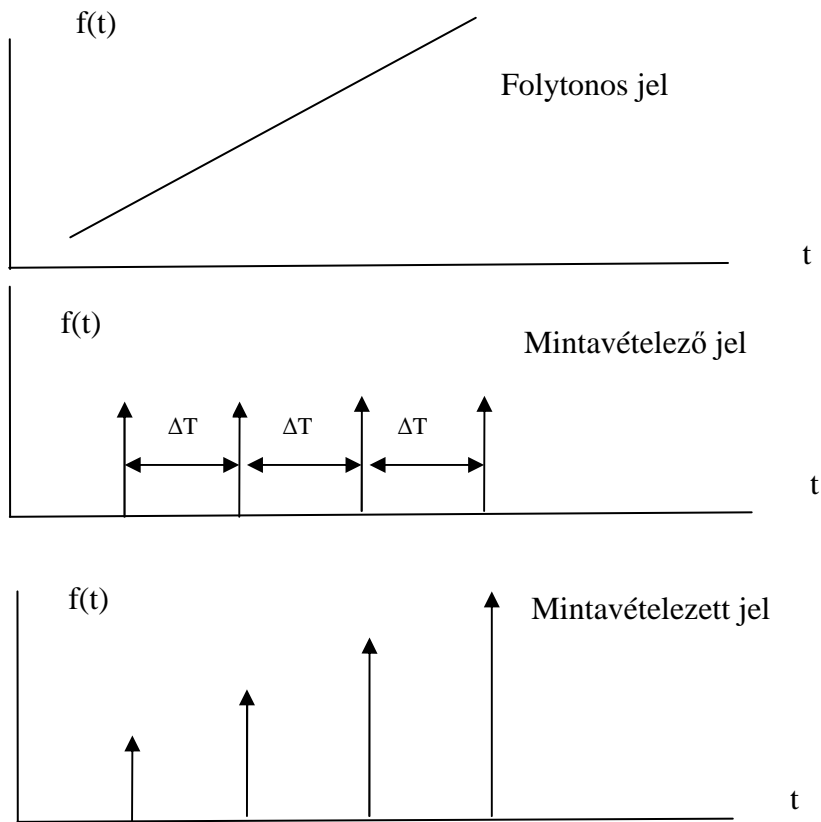
Mintavételezett jel csak a mintavételezési időpontokra értelmezhető.

Kvantált jel esetén az értelmezési időtartomány folytonos, de a jel csak meghatározott értékeket vehet fel. (1.5. ábra) Ezek az értékek egy adott $f(t)$ értékkészletet feloszthatnak egyenlő mértékben (lineáris kvantálás), de a kvantálási távolságok változhatnak $f(t)$ függvényében logaritmikus léptékben (a kvantálási szint növekedésével a szintek egyre sűrűbben követik egymást), vagy exponenciálisan (a szint növekedésével egyre nő a kvantálási távolság)

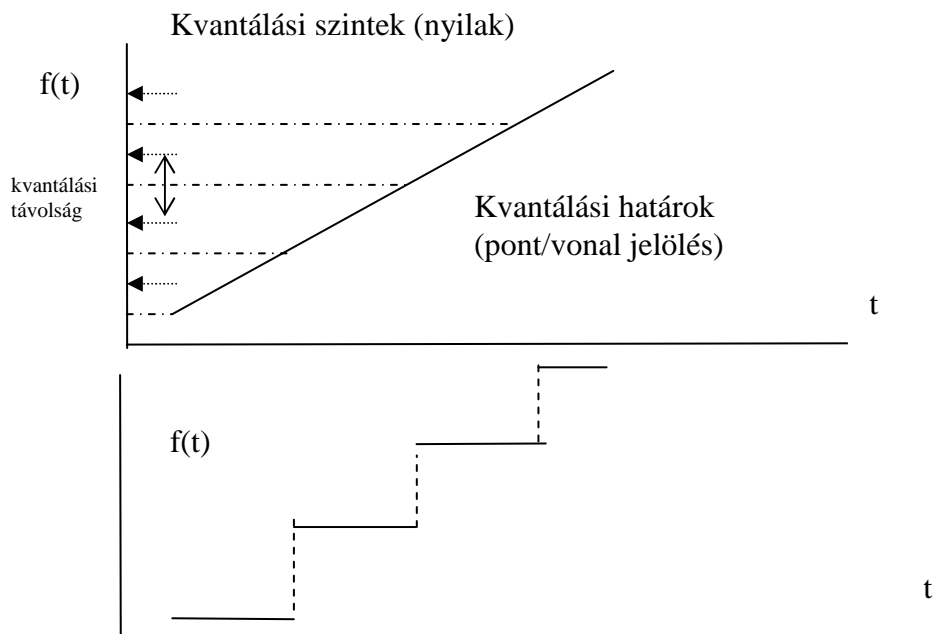
Diszkrét jel esetében sem az értelmezési tartomány, (idő) sem az értékkészlet (fizikai mennyiség) értelmezése nem folytonos, hanem meghatározott értékekre korlátozódik. (1.6. ábra)

⁹ A folytonos villamos jelet az elektronikában —közismerten —analóg jelnek nevezik, a diszkrét jel pedig kódolás után közvetlenül digitális jellé alakítható.

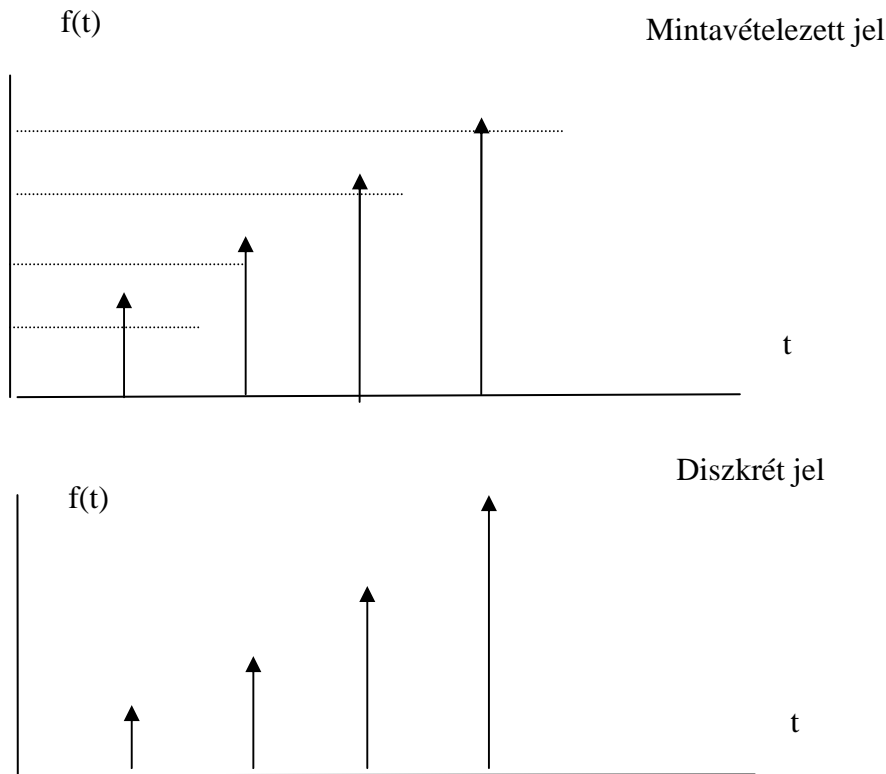
¹⁰(Vannak olyan esetek, melyeknél analóg és diszkrét forrás által kibocsátott üzeneteket megfelelő módon kódolunk, majd a vevő oldalon a dekódolás után szétválasztjuk. (Erre jó példa egy analóg TV rendszer teletextel). A vevőnek ebben az esetben analóg és digitális dekódolási funkciókat egyaránt el kell látnia.)



1-4. ábra. Mintavételezett jel generálása analóg jelből, mintavételező jel segítségével



1-5. ábra Folytonos jel átalakítása kvantált jellé (lineáris kvantálás)



1.6. ábra Mintavételezett jel átalakítása diszkrét jellé (lineáris kvantálás)

1.4. Determinisztikus jelek osztályozása. Tipikus vizsgáló jelek

A determinisztikus jeleket szokás osztályozni aszerint, hogy periodikusak, vagy nem-periodikusak. *Periodikus az $x = f(t)$ jel τ periódusidővel, ha $f(t) = f(t + \tau)$.*

A periodikus jelek között ismerünk véges, és végtelen energiájú jeleket. Ha valamely $U(t)$ feszültségforrás olyan periodikus jelet bocsát ki, amely nem 0 értékű ellenálláson gyakorlatilag a τ periódusidő alatt véges értékű energiát nyel el, úgy az az U jel véges energiájú. Ez képlet alakjában:

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} P^* R dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U(t^2) dt = A, \text{ ahol } A \text{ véges szám.} \quad (1)$$

Periodikus jelek esetén beszélhetünk véges teljesítményű jelekről, melyekre nézve az A/τ érték, azaz a periódusidő alatt disszipált teljesítmény értéke véges.

A jelek közül — a már ismert trigonometriai, valamint valós és komplex változójú exponenciális jeleken kívül igen lényeges két speciális jel vizsgálata, melyek a mérnöki

gyakorlatban — bár ezekben a letisztult formájukban fizikailag nem léteznek — mégis igen hasznosak különböző típusú villamos hálózatok, erősítők, stb. működésének kiértékelésére, vizsgálva a rendszer válaszjelét az adott vizsgálójellel történő gerjesztésre.

Igen fontos jel a Dirac¹¹-delta jel . (Jelölése: $\delta(t)$). A jelet (függvényt) három értékmeadással definiálhatjuk¹²:

$$\delta(t) = 0, \text{ ha } t > 0, \text{ vagy ha } t < 0$$

$$\delta(t) = \text{ meghatározhatatlan ha } t = t_0, \text{ viszont} \quad (2) \quad \mathcal{NB}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1; \quad (\text{a } \delta(t) \text{ alatti terület-} \infty \text{ és } +\infty \text{ " } t \text{ " értékek között egységnyi})$$

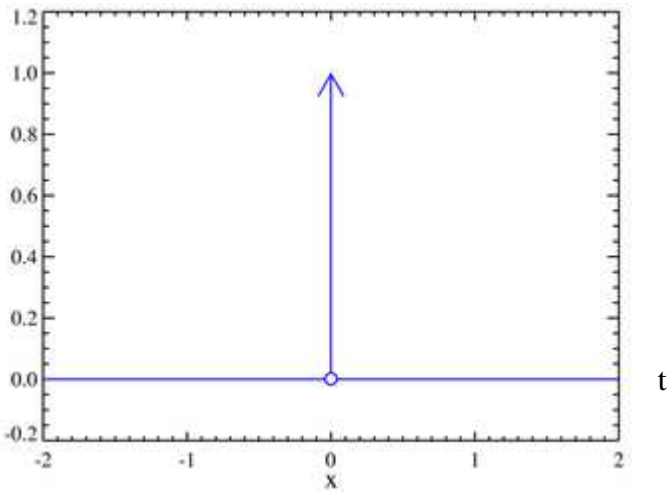
A függvény dimenziója 1/sec. (Villamos mennyiségek esetén V/sec, A/sec, W/sec)

A jel egy végtelen kis idejű, és végtelen nagy amplitúdójú t_0 időben jelentkező pozitív irányú túimpulzus. (Szigorúan véve ez a jel általánosabb értelemben nevezhető csupán függvénynek) Matematikailag tetszőlegesen sok függvény határértékével leírható, legegyszerűbb talán az

$$U = \lim_{\tau \rightarrow 0} 1/(2\tau) e^{-|t|/\tau} \quad (\text{a kitevőben „}t\text{” abszolút értéke szerepel}) \quad (3)$$

kifejezés, $\delta(t)$ esetére; $t_0=0$)

Az 1-7 ábra a $\delta(t)$ jel szokásos jelölési módját ábrázolja.



1-7. ábra. A $\delta(t)$ jel jelölése

A delta-jelet rendszerint fenti módon jelöljük. A $t=0$ pontban levő „nyíl” jelölés a jel mintavevő funkciójára utal. A $\delta(t)$ jel $+t_0$ argumentum-értékkel eltolt változatának jelölése természetesen $\delta(t-t_0)$. Ha valamilyen folytonos jelet, mely a $t = \tau$ időpontban értelmezhető, a $D(t-\tau)$ jellel szorozzuk, és a szorzatot bármilyen olyan a és b időpont között integráljuk, melyre teljesül az $a < \tau < b$ egyenlőtlenség, $f(\tau)$ értékét kapjuk:

¹¹ Paul Dirac (1902-1984) angol matematikus-fizikus. 1933-ban fizikai Nobel-díjat kapott.

¹² A függvénynek $t=0$ érték mellett ún. „izolált szingularitása (matematika I-II)” van.

$$\int_a^b f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau), \text{ ha } a < \tau < b \quad (4)$$

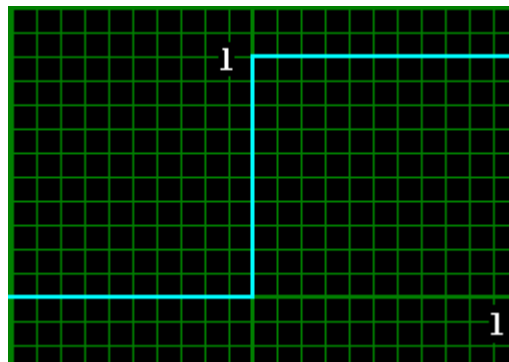
Ennek alapján egy $t_0 = 0$, majd $t_{n+1} = t_n + \tau$ időértékenként (τ időközönként) mintavételezett, eredetileg $f(t)$ jel matematikai leírása:

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f(t) \delta(t - n\tau) dt \quad (5)$$

Valamilyen villamos hálózatnak a $\delta(t)$ jelre, mint bemeneti jelre adott válaszjelét *súlyfüggvénynek* nevezzük. Jele: $k(t)$ A $\delta(t - \tau)$ jelre adott válasz $k(t - \tau)$. Szokás a hálózat viselkedését a súlyfüggvénnyel is leírni.

Érdekes módon a $\delta(t)$ függvény páros, még abban az esetben is, ha nem páros függvényből származtatjuk.¹³

A $\delta(t)$ jel $-\infty$ és t között számított határozott integrálja t függvénye. A neve egységugrásjel, gyakran Heaviside-féle függvénynek is nevezik:¹⁴



1-8. ábra. $1(t)$ egységugrás függvény

Jelölése $1(t)$, illetve a delta-jel analógiáján $1(t - \tau)$.

$$\begin{aligned} 1(t)_{t < 0} &= 0; \\ 0 &\leq 1(t)_{t=0} \leq 1 \text{ (meghatározhatatlan } 0 \text{ és } 1 \text{ értékek között, ha } t=0);^{15} \\ 1(t)_{t > 0} &= 1; \end{aligned} \quad (6) \mathcal{NB}$$

$$1(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt \quad (7) \mathcal{NB}$$

¹³ A III. fejezet 30. oldalán ezt bizonyítani is tudjuk.

¹⁴ Oliver Heaviside (1850-1925). Angol mérnök-fizikus-matematikus.

¹⁵ A függvény érdemes alaposabb tanulmányozásra, ezért kivételesen hivatkozunk egy konkrét forrásra: Abramovitz M – Stegun I.: Mathematical Functions with formulas... N.Y.- Dover, 1972. (Nehezen vitatható véleményük szerint mivel a $\delta(t)$ függvény páros, úgy az ebből integrált $1(t)$ függvény $t=0$ értéknél határozott, „0,5” értéket vesz fel.)

A függvény matematikai formában dimenzió nélküli, az elektronikában természetesen V , A , W dimenziókat vehet fel.

A hálózatnak az egységugrás-jelre adott válaszát *átmeneti függvénynek* nevezzük. A hálózat értékelésére gyakran az átmeneti függvény szolgál. Jele: $h(t)$

1.5. Az információ fogalma, meghatározása egyszerű és bonyolultabb esetekben

Az információ fogalmát legkönnyebben diszkrét adatfolyam, azaz egyszerű szimbólumsorozat vizsgálatával érthetjük meg. Megértéséhez a fizikából, pontosabban a termodinamikából már megismert fogalomhoz, az *entrópiához* kell folyamodnunk.

A termodinamika szerint tekintünk valamilyen rendszert, melynek több (N) állapota lehetséges, valamennyi állapothoz egy p_i valószínűség rendelhető hozzá: Az állapotok valószínűsége 0 és 1 között változhat, azaz általában nem tudhatjuk teljes valószínűséggel, hogy a rendszer melyik állapotban van. Nagyon durván megfogalmazva ezeknek az *állapotoknak az átlagos bizonytalansága a rendszer entrópiája*.

Shannon a kommunikációelméletbe átvitte ezt az értelmezést, a rendszer állapotát a várható diszkrét üzenetben található szimbólumok (hírek) megoszlására, *végző soron az üzenetet alkotó egyes szimbólumok (hírek), sőt az egész üzenet információ tartalmának mérhetővé tételére értelmezve*.

Ha egy X üzenetben x_1, x_2, \dots, x_n szimbólumok fordulnak elő, és az egyes szimbólumok megjelenésének valószínűsége $p(x_1), p(x_2) \dots p(x_n)$, akkor az egyes szimbólumok információ tartalma Shannon definíciója szerint

$$I(x_i) = -\log_2 p(x_i), \quad (8)$$

Ha 2-es alapú logaritmust számolunk, úgy az információ értékét bináris egységben, azaz *bitben* kapjuk meg. Miután a szimbólumokat diszkrét csatornán hagyományosan kétállapotú rendszeren továbbítjuk, a továbbiakban a „log” jelen *mindig 2-es alapú logaritmust értünk*. (Valójában az egyes valószínűségek reciprokának a logaritmusát kell számítani; ha egy „A” szimbólum valószínűsége $\frac{1}{2}$, úgy az információ tartalma $I = 1$ bit).

Az adott szimbólum információ tartamának várható értéke az üzenet információ tartamának és előfordulási valószínűségének a szorzata:

$$H(x_1) = p(x_1)I(x_1) = -p(x_1)\log_2 p(x_1) \quad (8a) \quad \mathcal{NB}$$

Az üzenet információ tartalmát pedig úgy kaphatjuk meg, hogy az egyes elemi szimbólumok információ tartalmának várható értékét összeadjuk.

$$H(x_1, x_2, \dots, x_j) = -p(x_1)I(x_1) - p(x_2)I(x_2) - \dots - p(x_n)I(x_n) = \quad (9)$$

$$= -(p(x_1)\log_2 p(x_1) - p(x_2)\log_2 p(x_2) - \dots - p(x_j)\log_2 p(x_j)),$$

ennek rövid jelölése:

$$H(x) = \sum_{i=1}^{i=n} -p(x_i)\log_2 p(x_i), \quad (11) \mathcal{NB}$$

egy n szimbólumból álló üzenetre. (a „-„ jel szerepe ugyanaz, mint a $p(x_i)^{-1}$ kitevőnek, azaz csökkenő valószínűségek mellett az adott szimbólum információértéke nő.)

Látható, hogy az x üzenet információtartalma az egyes elemi szimbólumok $I(x) := -\log_2[p(x)]$ „egyedi információtartalmának” várható értéke., azaz valószínűségükkel súlyozott átlagértéke.¹⁶

Az üzenet információtartalma megegyezik az üzenet entrópiájával.

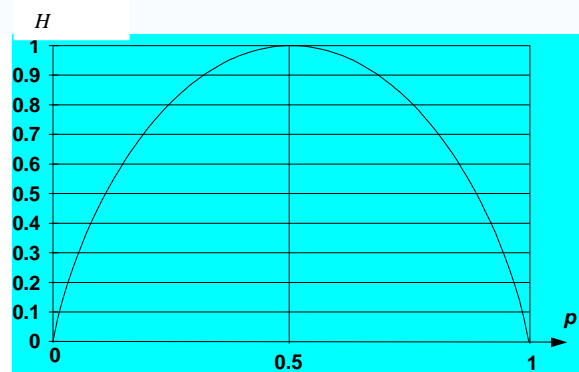
Amennyiben valamely forrás kizárólag egyező információjú üzenetek kibocsátását végzi, úgy az üzenet információtartalma valóban a forrás entrópiájával egyezik meg.

Amennyiben a forrásra véges m számú, egyenként H_i információtartalmú, és p_i valószínűséggel megjelenő üzenet lehet a jellemző, úgy a fentiekhez hasonlóan definiálható a forrás entrópiája, azaz az egyes üzenetek átlagos entrópiatartalma is:

$$H = \sum_{i=1}^{i=m} -p_i H_i, \quad (12) \mathcal{NB}$$

Ezen a ponton kanyarodhatunk vissza a hír fogalmához:

A hír a matematikai kommunikációelmélet szerint olyan feldolgozott adat, melynek a kommunikációs csatornán üzenetként történő átvitele során a fogadó



1-9. ábra

H függése a szimbólumok előfordulási valószínűségétől 2 szimbólum esetén

¹⁶ Felvetődik a kérdés, hogy az információ értékének előfordulási értéke reciprokának a logaritmusát?

Nos, Shannon 3 alapfeltételezéssel élt:

a. Azt egyes szimbólumok információtartalma legyen a valószínűségükkel összefüggésben: Kisebb valószínűséggel várható szimbólumokhoz rendeljünk nagyobb információt (ilyenkor a „szimbólumot” helyettesíthetjük hírrel, mint az eseményekből összeállított üzenet alapelemével)

b. Valamely két szimbólum együttes előfordulásának az információja legyen a szimbólumok információjának összege

c. Shannon az információ alapegységét (bit) úgy választotta meg, hogy egy 0,5 valószínűségű szimbólum információja egységnyi legyen

Matematikailag bizonyítható, hogy fenti 3 alapfeltételezést csak az $I(x) = -p_x \log_2 p_x$ összefüggés elégíti ki. (Ne feledjük, hogy $p_{xy} = p_x \cdot p_y$)

*entrópiaszintje (bizonytalansága) nem csökken.*¹⁷

Visszatérve az üzenet entrópiájához, szembeötlő, hogy az egyes szimbólumok valószínűségének megoszlása mennyire hat az üzenet információjának az értékére. Egyszerűség kedvéért vizsgáljunk meg egy olyan üzenetet, amely csak két szimbólumból áll (mondjuk A és B). Legyen „A” szimbólum előfordulási valószínűsége p , B szimbólumé így $(1-p)$ értékre adódik. Az 1-2 ábra a H információ értékét ábrázolja „ p ” függvényében:

Fentieket kiterjeszthetjük N szimbólum esetére is:

$$H_{max} = -\log N \quad (13)$$

Természetesen a valóságos H érték a tényleges eloszlástól függ.

Az üzenet H entrópiájának az adott szimbólumszámhoz tartozó H_{max} -ra viszonyított értékét nevezzük *relatív entrópiának*. Ha a relatív entrópiát kivonjuk 1-ből, megkapjuk az üzenet *redundanciáját*.

(Egy nyolc szimbólumból álló üzenet max. redundanciája 3 bit. Ha a valószínűségek értéke $1/2 — 1/4 — 1/8 — 1/16 — 1/32 — 1/64 — 1/128 — 1/128$, akkor a tényleges H érték csak 2 bit-re adódik, a relatív entrópia $2/3$, a redundancia $1/3$.)

Igen fontos terminológia a forrás által időegység alatt forgalmazott entrópia, (információ), H' , egysége bit/sec

$$H' = \frac{H}{T} \quad (14)$$

ahol

T — 1 szimbólum információ forgalmazásához szükséges idő.

Amennyiben a szimbólumok forgalmazási ideje változó (az egyik szimbólum kódja rövidebb a másoknál), úgy az alábbi (15) képlet valamivel bonyolultabb. Ebben az esetben N szimbólum össz-információértékét kell osztani a szimbólumok összforgalmazási idejével. Minél nagyobb N értéke, annál jobban jellemzi a kapott H' érték a forrás entrópia-forgalmazási idejét::

$$H' = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{i=N} H_i}{\sum_{i=1}^{i=N} T_i} \quad (15)$$

¹⁷ Ez a kritérium a hír köznapi definícióját matematikai alapon közelíti. Tartalma szerint a beérkezett üzenetre a fogadó nem számított, bizonytalanságát nem csökkentette. Az entrópia utólag a fogadó tudásbázisának bővítésével (egyéb ismeretek megszerzésével) csökkenthető.

1.6. Csatornkapacitás ideális, és tényleges („zajos”) csatorna esetén. Feltételes entrópia

Diszkrét csatorna kapacitása (C) alatt azt a maximális, a csatorna bemenetén mérhető $H'(x)$ entrópiasebességet értjük, amivel a csatornán tetszőlegesen kis hibával forgalmazni lehet.

$$C = H'_{max} \quad (16) \quad \mathcal{NB}$$

A csatorna kimenetén és bemenetén mérhető entrópia reális esetben nem egyenlő, a csatorna általános esetben az entrópia (bizonytalanság) növekedését okozza, ez a járulékos entrópia az un. relatív entrópia, $H_y(x)$, illetve annak időegység alatt mérhető értéke, $H'_y(x)$.

Ennek az entrópiának a számításához be kell vezetnünk a $p_i(j)$ feltételes valószínűség fogalmát.. Ez a változó azt mutatja meg, hogy az egyik esemény „i” szimbólumának biztos megjelenése mekkora valószínűséggel vonja maga után a másik esemény „j” szimbólumának megjelenését. Általában események függetlenségének értékelésére alkalmas, (Az egyik üzenet tartalmazza az utolsó száz év alatt a nyári hónapokban lehullott csapadék mértékét, a másik pedig ugyanebben az évben a termésátlagokat) .

$H_y(x)$ értékét megkaphatjuk, ha az X üzenet összes „i” szimbólumához tartozó $p_i(j)$ értékek entrópiáját kiszámítjuk, majd ezeket az adott p_i értékeknek megfelelően súlyozva összegezzük.¹⁸:

$$H_y(x) = \sum_{i,j=1}^{i=n, j=m} p(i) H_i(j) \quad (17)$$

Ez a járulékos bizonytalanság esetünkben azt méri, hogy ha már ismert előttünk az, hogy a csatorna bemenetén valamely szimbólum forgalmazásra került, a kimeneten ennek a szimbólumnak a vétele nem garantált..

Ennek a bizonytalanságnak a csökkentésére a bemeneten a kódolóban az adott szimbólum forgalmazási idejét növelni kell, azaz csökkenteni a bemeneti $H'(x)$ értéket. A növelés azonban csak olyan módon történhet meg, hogy vagy az egyes szimbólumok kódjainak hosszát növeljük meg oly módon, hogy a kimeneten a „bitkép” torzulása esetén is jó eséllyel helyre tudjuk állítani a forgalmazott szimbólumot, vagy ennek a célnak az elérésére járulékos

¹⁸ Általános esetben az X üzenet szimbólumkészlete $i=1 \dots n$, az Y üzeneté akár $j=1 \dots m$ is lehet, m és n nem feltétlenül egyenlők. A vett üzenetben megjelenhet egy olyan kód is, amelyet X üzenet egyáltalán nem tartalmazott.

szimbólumokat iktatunk be. (Példaképpen említjük meg azt a „módszert”, hogy minden szimbólumot duplán forgalmazzunk...) ¹⁹.

Ha a csatorna „ideális” (zajtalan, azaz a bemeneti információ $H(x)$ megegyezik a kimeneti $H(y)$ információval), akkor a feltételes entrópia értéke 0. ²⁰

Ha a csatorna zajos, akkor a kimeneten helyreállítható üzenet értéke teljeséggel nem garantált, de azt tetszőleges pontossággal megközelítheti.

Miután a folytonos (analóg értékeket folytonosan kibocsátó) forrás és csatorna elemzését a diszkrét rendszer analógiájában keressük, a feltételes entrópiának, mint az üzenettévesztés mértékének megértése igen fontos számunkra. Ezt egy egyszerű példa segítségével kíséreljük megvilágítani:

Igen egyszerű esetben tekintsünk egy egyszerű, két változóból álló üzenetet, melyet a forrás 1000 bit/sec sebességgel ad. Legyen mindkét változó bemeneti valószínűsége, azaz $p(x)=0,5-0,5$ mindkét szimbólumra. A csatorna „zajossága miatt sajnálatos módon minden századik szimbólumot a rendszer téveszt (ezt nevezik drop-out-nak a számítástechnikában). Az eredményeket az 1-1 táblázat foglalja össze.

Látható, hogy 5 % tévesztés 0,29 bit feltételes entrópiát okoz!

1-1. Táblázat. Zajos csatorna feltételes entrópiája

Bemeneti szimbólum	Kimeneti szimbólum	$p_i(j)$,	$\log_2 p_i(j)$,	Részszorzat, bit	Részentrópia
0	0	0,95	-0,074	-0,070	0,285
0	1	0,05	-4,3	-0,215	
1	0	0,05	-4,3	-0,215	0,285
1	1	0,95	-0,074	-0,070	

$$H_y(x) = 0,5 \cdot 0,285 + 0,5 \cdot 0,285 = 0,285$$

Az információelmélet szerint abban az esetben, ha a „zaj nélküli” csatornakapacitás $C = H'$ max, azaz a max. forgalmazási sebesség a fent említett 1000 b/sec (a bit/sec egységet a hírközlés egyik nagy úttörőjéről baud-nak nevezik), akkor az említett bittévesztés a max. forgalmazási sebesség, egyben a C értékét is 710 baud-ra veti vissza. Ebben az esetben a tehát a max. $H' \times$ érték is csupán 710 baud.

¹⁹ A kódolási technika egy másik tantárgy igen érdekes fejezete. Ha az egyes szimbólumok 2-es számrendszerben ábrázolt kódjának hossza meghaladja a szimbólum információértékét, redundáns („bőbeszédű”) kódolásról beszélünk.

²⁰ Ne feledjük el, hogy a „zajos csatorna” elnevezést itt absztrakt értelemben használjuk. A „csatornazaj” nem biztos, hogy a továbbító közegben jelentkezik, (jelentkezhet a vevőben, a kódolóban, a dekódolóban, stb.), és nem is biztos, hogy zaj: lehet torzítás, zavar, stb.

A bemeneti a szimbólumok következhetnek 1000 bauddal egymásután, de 710 üzenet-szimbólumhoz min. 290 olyan szimbólumnak kell tartoznia, melyek valamilyen módon kapcsolódnak az üzenet szimbólumához abból a célból, hogy a kimeneten az üzenetet korrigálni lehessen.²¹ Ha ezt nem tesszük, és továbbra is 1000 baud-dal forgalmazunk, a vett üzenet kiértékelhetősége csak 71 %...

Fentiek szerint tehát a tényleges forgalmazási sebesség, (jele R) és ennek max. értéke, a csatornakapacitás is az elküldött üzenet másodpercre eső információértékének és a feltételes entrópia másodpercre eső értékének a különbsége lesz::

$$R = H'(x) - H'_y(x) \quad (18) \mathcal{NB}$$

$$C = R_{max} = H'(x)_{max} - H'_y(x)_{max} \quad (19)$$

Ha a forgalmazásnál ügyelünk arra, hogy $H'(x)$ értéke ne haladja meg C értékét, akkor a bemenetet tudjuk úgy kódolni, hogy az üzenet forgalmazási sebessége a $H'(x)$ értéktől csak az általunk megengedett mértékben térjen el. C értékét azonban csökkenti a csatornában fellépő feltételes entrópia $H'_y(x)$.²²

1.7. Folytonos forrás, folytonos üzenet, folytonos csatorna információelmélete

Folytonos információ forrásai és a folytonos csatorna nem feltétlenül rendelendők össze. Jelenleg elterjedőben van, hogy folytonos jeleket is —átalakítás után—diszkrét csatornán továbbítunk, (ezt nevezik hibrid rendszernek: folytonos forrás, diszkrét csatorna), mert ezzel a módszerrel jobban ki tudjuk használni az információelmélet és a kódolási technikák nyújtotta lehetőségeket.²³

A folytonos forrás információjának, információáramlási sebességének, a folytonos csatorna kapacitásának megértéséhez tisztáznunk kell néhány fogalmat a *folytonos mennyiségek statisztikai jellemzői közül*

A szóban forgó folytonos adatfolyam értékeit ebből a szempontból tekintjük statisztikai változónak. Ennek a statisztikai változónak (x) legfontosabb jellemzőit vegyük sorra:

A, *Valószínűségi sűrűség függvény* (Probability distribution function). Jele: $f(x)$

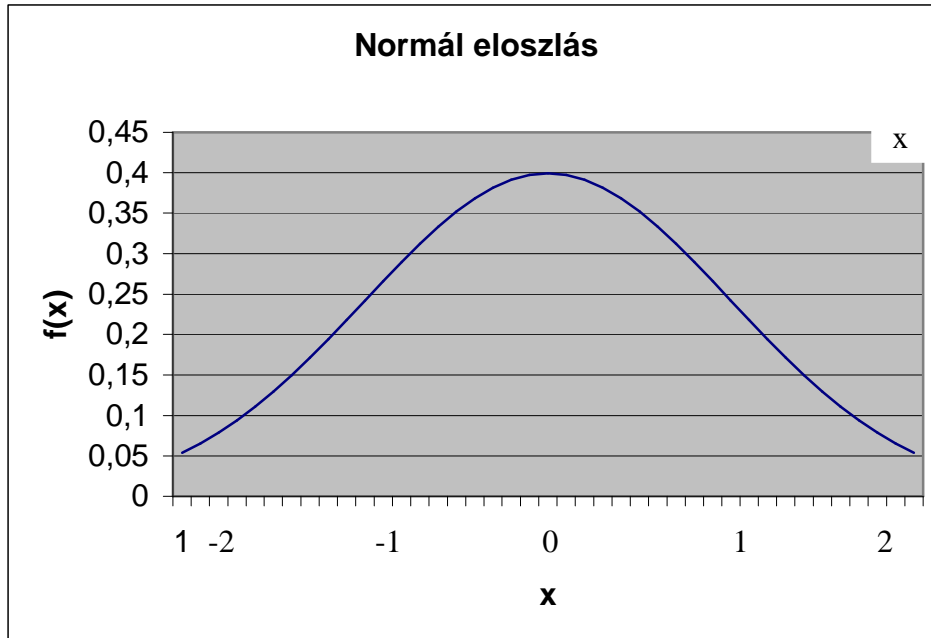
Annak a valószínűsége, hogy egy X valószínűségi változó értéke egy tetszőlegesen megadott intervallumba esik, megadható egy függvény görbéje alatti területnek az intervallumba eső részével, akkor a függvényt az X valószínűségi változó sűrűségfüggvényének nevezzük.

²¹ A hibajavító kódolás jelentősége a relatív tévesztések értékének csökkenésével nem csökkent, mivel a szükséges forgalmazási sebesség állandóan nő.

²² Claude Shannon igen fontos tételei a zajok hatásáról diszkrét forrás és csatorna esetére.

²³ Ezt a megoldást a digitális jelfeldolgozás nyújtja. Érdeklődők számára Kandós jegyzet is rendelkezésre áll.

A sűrűségfüggvény dimenziója $1/|x|$. Tételezzük fel, hogy \bar{a} valószínűségi változónk dimenziója V, feszültség, mert forrásunk analóg feszültségforrás. (analóg kimenetű kamera). $f(x)$ mértékegysége $1/V$ ebben az esetben. Lényeges, hogy a teljes $f(x)$ alatti terület értéke 1, hiszen annak a valószínűsége, hogy a jel az értékkészletén belül legyen, valóban 1



1-10. ábra. Normál eloszlású sűrűségfüggvény. $\sigma = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \quad (20)$$

(Esetünkben a kamera kimeneti jele -8 V és +8 V között változik. Ha megmérjük a görbe alatti terület kijelölt részét, azt kapjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a kamera kimeneti jele -2V és +1 V között legyen, kb. 0,26.)

B, Valószínűség-eloszlás függvény (Cumulative probability distribution function)

„x” pontbeli értéke annak a valószínűségét adja meg, hogy a valószínűségi változó értéke x-nél kisebb. A valószínűségi változó legfontosabb jellemzője. (Jele: F(x))

Az előbbi példát tekintve F(0V) annak a valószínűsége, hogy a folytonos függvény kimeneti jele 0V-nál kisebb, azaz a -8V—0V közötti tartományba esik. Ennek az értéke láthatóan 0,5.

Az F(x) dimenzió nélküli érték, 0-1 között változhat.

Vegyük észre az alábbi összefüggést:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx \quad (21) \mathcal{NB}$$

$$F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1; \quad (22)$$

C, A valószínűségi változó *várható értéke* a változó minden egyes értékének a sűrűségfüggvénnyel súlyozott „átlaga”, Jele $M(x)$:

$$M(x) = \int_{-\infty}^x xf(x)dx \quad (23)$$

Egyáltalán nem biztos, hogy $M(x)$ értéke egybeesik $f(x)$ maximumával! Egyszerűség kedvéért tekintsük az $f(x) = e^{-x}$ függvényt azzal a megkötéssel, hogy x csak pozitív értéket vehet fel, egyébként $f(x)$ értéke 0. $f(x)$ maximumánál van, a várható érték pedig 1.

D, A valószínűségi változó tényleges értékének a várható értéktől számított közepes eltérését a *szórásfüggvény* méri. Jele: $D(x)$.

$D(x)$ definíciója szerint $[x-M(x)]$ négyzete várható értékének a négyzetgyöke. Ezt még kimondani is bonyolult. Jóban szeretjük helyette a „szórásnégyzet” terminológiát, ami az eltérések négyzetének várható értéke. (A „négyzet” szó arra utal, hogy a negatív és pozitív irányú eltérés egyaránt növeli a szórást.)

$$D(x) = \sqrt{M[(M(x) - x)]^2} \quad (24)$$

Ez azt jelenti. Hogy x valamennyi értékére kiszámítjuk az $M(x)-x$ értéket, négyzetre emeljük, és beszorozzuk az x -hez tartozó $f(x)$ értékkel, ezt a szorzatot x teljes tartományában integráljuk, és az integrál négyzetgyöke lesz a szórás.

$$D(x) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (M(x) - x)^2 f(x)dx} \quad (25)$$

A szórás utal arra, hogy $f(x)$ mennyire meredeken zuhan le a maximális értéke körül. Dimenziója megegyezik x dimenziójával, azaz V, A, vagy W.(a villamos méréseknél)

Analóg forrás és analóg kommunikációs csatorna esetén a forrás entrópiájának maximális értékét az $f(x)$ függvény alakja, a bemeneti adatfolyam szórása, ($D(x)$, gyakran találkozunk a „ σ ” megjelöléssel is, elsősorban információelméleti anyagokban), a kommunikációs csatorna paramétereit pedig a csatorna sávszélessége (B), és a csatorna kimenetén a hasznos adatfolyam teljesítményének és a zajteljesítménynek aránya (S/N) határozza meg.

A forrás által kibocsátott analóg jel átlagos információtartalma (ebben az esetben a szimbólumokat a kimeneti jel értékei helyettesítik), a diszkrét forrás analógiájára:

$$H(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log(f(x)) \quad (26) \quad \mathcal{NB}$$

$H(x)$ értékét $f(x)$ -ből számítható $D(x)$ - en kívül erősen befolyásolja $f(x)$ jellege is, melyet eloszlásnak nevezünk. Egy adott $D(x)$ érték mellett a legnagyobb információértéket az un.

Normális eloszlás adja. (ezt láttuk az 1.6. ábrán is). Ennél az eloszlásnál $f(x)$ az alábbi egyenlettel definiálható:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x^2/2\sigma^2)} \quad (27)$$

Az eloszlás maximuma ebben az esetben 0V. $F(x)$ maximális értéke $0,4/\sigma$. Amennyiben $f(x)$ ilyen képlettel definiálható, azaz a jel normális eloszlású, úgy $H(x)$ értéke könnyen számítható:

$$H(x) = \log_2 \sqrt{2\pi e} \sigma \approx \log_2 (4,1\sigma) \quad (28)$$

Látható, hogy minél szétterülőbb az $f(x)$ függvény, (azaz minél nagyobb a szórása) annál nagyobb annak az üzenetnek az entrópiája, amelyhez az $f(x)$ függvény tartozik.

A szórás legnagyobb mértéket fehér zaj²⁴ esetén ölt, amelynek ráadásul az eloszlása is normális. (Kemény ellenfél). Ez szintén evidensnek tűnik, hiszen egy sztochasztikus, véletlenszerű jelről tudhatjuk legkevésbé, hogy milyen lesz a lefolyása.

Nagy mérnöki lazaság, de mégis elterjedt, így mi is megengedhetjük: „Üzenetünk természetesen nem zaj, de nemcsak a sűrűségfüggvénye normál eloszlású, hanem a szórása is akkora, mint a fehér zajé.”

Nos, ebben az esetben „ σ ” valóban maximális, és értéke \sqrt{N} , ahol

$N-1$ Ω ellenálláson disszipálódó átlagteljesítményt jelöl, valójában a jel effektív értékének a négyzete. (U_{eff}^2)

Fentiek alapján nagyon egyszerű összefüggést kaphatunk a folytonos információ értékére:

$$H_{\max \max} = \log_2 \sqrt{2\pi e U_{eff}^2} \quad (29)$$

Minden más eloszlás esetén $H(x)$ értéke adott σ érték mellett kisebbre adódik.

Érdemes rögtön definiálni a forrás információsebességét is:

$$H'x = H(x) / T, \quad (30)$$

T értékét a Nyquist-Shannon-féle mintavételi tétel mutatja meg. A tétel szerint abban az esetben, ha valamilyen jel frekvenciaspektruma B értékkel korlátos, úgy bizonyítható, hogy ha a jelből $T=1/2B$ időközönként veszünk mintát, úgy a mintavételezett jelből az eredeti folytonos függvény pontosan helyreállítható. Behelyettesítve $T = 2/B$ értéket $H'(x)$ max értékére

$$H'(x) = 2B \log_2 \sqrt{2\pi e} \sigma \approx 2B \log_2 (4,1\sigma) \quad (31)$$

²⁴ A fehér zaj teljesítményspektruma az átviteli sávban const. A spektrum fogalmával a III.. fejezet, a zaj teljesítményspektrumával, és általában a zajokkal a VII.. fejezet foglalkozik.

H'_x értéke normális eloszlású jel esetén a folytonos jelnek, mint valószínűségi változónak a szórásától függ. Legnagyobb szórással ezen belül az a folytonos jel rendelkezik, amely statisztikai tulajdonságai megegyeznek az un. fehér zaj tulajdonságaival. A fehér zaj normális eloszlású, szórása megegyezik effektív értékével. ($U_{eff.}$)²⁵

Ismét használva a fehér-zaj elméletet:

$$H'_x = B \log_2(2\pi U_{eff. jel}^2) \quad (32)$$

$$(2 \log a = \log a^2) \quad (33)$$

Diszkrét forrás esetén H dimenziója mértékegység nélküli, bit, H' dimenziója pedig bit/sec..

Folytonos forrás esetén talán zavaró lehet, hogy H(x) mértékegysége, és értéke is változik x alapegységének a függvényében. (Akár negatív értéket is kaptunk). Ez azt jelenti hogy a diszkrét forrástól eltérően az entrópia folytonos üzenet esetén a bizonytalanságnak valamilyen felvett egységhez (V, mV, GW) viszonyított, azaz relatív értékét mutatja meg.

Folytonos csatorna kapacitása a diszkrét csatorna analógiája alapján definiálható és számolható. Folytonos (analóg) rendszereknél is létezik feltételes entrópia, mely csökkenti az R értéket, és így a csatornkapacitást, az információ továbbításának maximális sebességét is.

$$C = R_{max} = H'(x) - H'_y(x) \quad (34)$$

$H'_y(x)$ a feltételes entrópia sebessége, ugyanúgy, mint a diszkrét forrás esetén. Zajos analóg jel esetén azonban a legtöbb esetben a zaj egyszerűen rászuperponálódik, ráül a jelre. Ebben az esetben az információ sebességére az alábbi egyenlet utalhat.²⁶

$R = H'(x) - H'(n)$ (n — noise, zaj) a zaj entrópiája, amely viszont meglehetősen korrekt módon számolható:

$$H'_n = B \log_2(2\pi U_{eff. zaj}^2) \quad (35)$$

A vevőnél jelentkező entrópia számításánál pedig feltételezzük, hogy a kimeneti jel effektív értékének négyzete a bemeneti jel és a zaj effektív értékei négyzetének az összege.

Fentiek alapján a max. információsebesség (ha a jel a B frekvenciájú komponenset is tartalmazza):

$$R_{max} = B \log_2 2\pi(U_{eff. jel}^2 + U_{eff. zaj}^2) - B \log_2(2\pi U_{eff. zaj}^2) \quad (36)$$

Mivel a logaritmusok különbsége az alapok hányadosának logaritmus

$$R_{max} = B \log_2 \frac{U_{jel}^2 + U_{zaj}^2}{U_{zaj}^2} ; \text{ azaz } R = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) ; \quad (37)$$

²⁵ Ld. VII. fejezet. (Zajok)

²⁶ Miatán csak érzékeltetni szeretnénk ezeket a fogalmakat, és ez – remélhetőleg – a későbbiekben segítségünkre lesz, nem vezetjük le ezeket az összefüggéseket. Az információelmélet önmagában külön tantárgy lehetne.

S/N a jel-zaj hányados; adott bemeneten mérhető jel-és zaj teljesítmények hányadosa.

Amennyiben a csatorna kimenetén ismert a jel/zaj viszony, ez pontosan megmutatja a csatornkapacitás, azaz az információ maximális továbbítási sebességének értékét is.

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad (38)$$

Ellenőrző kérdések

1. Határozzuk meg az üzenet, a forrás és a jel fogalmát!
2. Mi a különbség a diszkrét és a folytonos üzenet között?
3. Mi az összefüggés a Dirac-delta jel és a Heaviside-féle egységugrás jel között?
4. Mi a különbség az entrópia és az információ között?
5. Mitől függ valamely diszkrét üzenet információját?
6. Mi a csatornkapacitás?
7. Mi az a feltételes entrópia? Hol van ennek szerepe a csatornkapacitásban?
8. Mi az összefüggés a sűrűségfüggvény $f(x)$ és a valószínűségeloszlás-függvény között?
9. Milyen tényezők határozzák meg egy folytonos forrás információértékét?

II. fejezet

A hálózatelmélet alapjai

2.1. Lineáris és nemlineáris hálózatok

Lineáris hálózatok esetén a hálózat bármely pontján létrehozható (áram-, vagy feszültség-) gerjesztés és a hálózat egyéb pontjain mérhető (áram-, vagy feszültség-) válaszok között lineáris összefüggés mutatható ki, egyszeres gerjesztés esetén a válasz/gerjesztés arány független a gerjesztés mértékétől (aránytartás), többszörös gerjesztés esetén a gerjesztések összegére adott válasz egyenlő az egyes gerjesztésre adott válaszok összegével. (szuperpozíciós tétel). Más szavakkal: a lineáris hálózat összeg-és aránytartó.

Lineáris hálózatok valamennyi elemének lineárisnak kell lennie.

Szigorúan véve lineáris hálózat nem létezik, mert a hálózatokban szereplő alkatrészek nemlineárisak.

Nemlineáris elem a tekercs (még a légmagos is), az ellenállás, a kondenzátor, nem beszélve a közismerten nemlineáris diódákról, és egyéb félvezetőről.

A hálózat tervezéséhez, vagy működésének elemzéséhez (hálózatszintézis és hálózatanalízis) azonban bizonyos megkötésekkel az elemeket lineáris helyettesítőképpel cseréljük le, és —ha a bemeneti gerjesztés nem lép túl valamilyen *számítható* értéket — a hálózatot *meghatározható pontatlansággal* lineárisnak tudjuk tekinteni.

2.2. Áramköri elemek

„Áramköri elem” alatt olyan idealizált modelleket értünk, melyek működését egyetlen paraméterrel határozhatjuk meg.

Az áramköri elemeket két nagy csoportra oszthatjuk: aktív és passzív áramköri elemekre. Aktív áramköri elemeknek nevezzük azokat az elemeket (vezérelt generátorokat) melyek alkalmasak teljesítmény erősítésére. Passzív elemek megfelelő beállításban erősíthetnek feszültséget, vagy áramot, teljesítményt azonban nem képesek erősíteni.

Az elemeket szokás megkülönböztetni abból a szempontból is, hogy a hálózatba hány ponton „ékelődnek” be, azaz hány ponton csatlakoznak. A legtöbb passzív áramköri elem két ponton csatlakozik a hálózathoz, ezeket kétpólusoknak nevezzük. Az aktív áramköri elemek több legalább 3) ponton keresztül csatlakoznak a hálózathoz, ezek tehát többpólusok. (Szokás még

az egykapu, többkapu terminológiát is használni, mi azonban az előbbi elnevezést fogjuk használni), annak megfelelően, hogy a hálózatba hány ponton (Kirchoff megfogalmazása alapján: csomóponton, és ez akkor is igaz, ha a „csomópont” csak két elem összekötése) keresztül csatlakoznak.

2.2.1. Passzív lineáris áramköri elemek

A passzív kétpólusok közé három idealizált elemet sorolunk:

a, az ellenállást, melyre nézve a két végpontja között eső feszültség és az elemen átáramló áram pillanatnyi értéke között a kapcsolat időtől független arányossági tényező, az „ellenállás”, R ; (Ohm törvénye)

$$u = R i \quad (1)$$

b, az induktivitást, (mágneses tekercs önindukciójával összefüggésben,) melyre nézve a két végpont között eső feszültség pillanatnyi értéke és az áramnak az idő függvényében történő differenciálja pillanatnyi értéke között az arányossági tényező az „induktivitás”, L (Faraday törvénye).

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (2)$$

c, a kapacitást, melyre nézve a két végpont között eső feszültség pillanatnyi értéke és az áramnak idő függvényében vett integráljának pillanatnyi értéke között az arányossági tényező a „kapacitás” reciprok értéke:

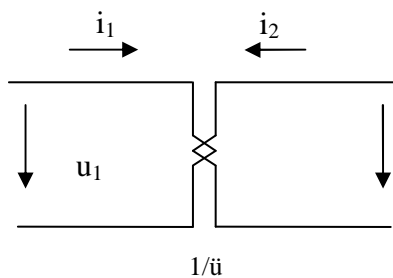
$$u = \frac{1}{C} \int i dt \quad (3)$$

Az „ L ” induktivitás egyetlen önindukciós tekercs által létrehozott mágneses térrel függ össze. A passzív lineáris négy-pólusok az a-,c, alpontokban specifikált kétpólusok által alkotott hálózatok.

A fentiekén kívül azonban tartalmazhatnak egy idealizált négy-pólus elemet, az ideális transzformátort is. Ez az elem két, szorosan csatolt (pl. egyetlen toroid gyűrűre tekercselt) tekercs kölcsönös indukciójával jön létre, és a hálózat két pontja közötti váltófeszültséget (primer feszültség, u_1) áttétel (\ddot{u}), felszorozásával a hálózat tetszőleges két másik pontja felé közvetíti, (u_2 , szekunder feszültség), míg a szekunder körben folyó áramot a primer körbe szintén \ddot{u} áttétellel felszorozva terheli át.

$$u_2 = u_1 \cdot \ddot{u} \quad i_1 = -i_2 / \ddot{u} \quad (4)$$

Az áramra vonatkozó egyenletben szereplő „-” jel az áramirányok felvételével függ össze. Négypólusok esetében a pozitív áramirány mind a primer, mind a szekunder körben a négypólus „felé” irányul. (2-1. ábra)



2-1. ábra. Ideális transzformátor

2.2.2.. Aktív áramköri alapelemek

Ezek az elemek diszkrét- vagy integrált kivitelű berendezések egyes tulajdonságait képviselhetik. Valamennyien négy- vagy többpólusok, s a passzív elemekből összeállított négy- vagy többpólusoktól lényegesen különböznek annyiban, hogy a kimeneti kör váltóáramú összetevőjének teljesítménye a bemenet(ek)en mérhető váltóáramú komponens(ek) teljesítményének (össz)értékét meghaladhatja.

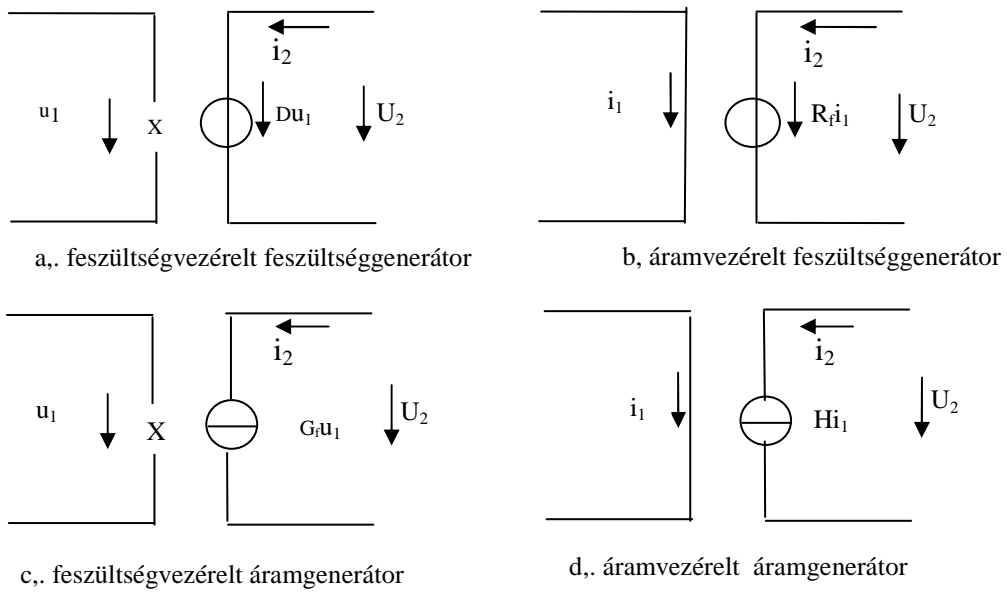
a, A lineáris aktív négypólus-modellek ún. *vezérelt generátorok*, melyek teljesítményerősítése elvileg ∞ (2-2. ábra)

Ezeket az egyszerű elemeket egyetlen paraméter, a D, H erősítési tényező, illetve az R_f és G_f *transzfer impedancia/admittancia*²⁷ írja le. A bemeneti paraméterek közül vagy az áram, vagy a feszültség értéke 0, (rövidzár, vagy szakadás), a kimeneti soros impedancia, ill. párhuzamos admittancia értéke szintén 0.

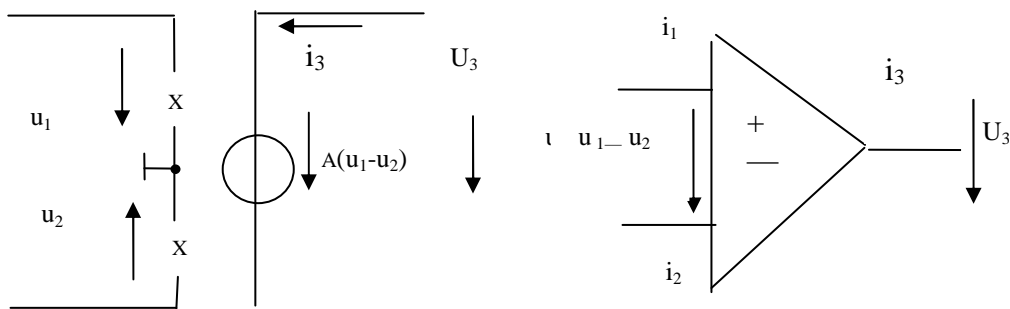
b, Az aktív hatpólusok (pontosabban: ötpólusok) klasszikus ideális áramköri eleme az *ideális műveleti erősítő*.

Ez az elem két bemenettel, és egy (vagy két) kimenettel működő feszültségvezérelt feszültséggenerátor, melynek vezérlőfeszültsége a két bemeneti feszültség különbsége.

²⁷ Az R és G paraméterek mellett szereplő „f” (forward) index arra utal, hogy *kimeneti és bemeneti* villamos érték közötti arányossági tényezőt értünk alatta.



2-2. ábra. Vezérelt generátorok



2-3. ábra. Ideális műveleti erősítő helyettesítő képe és jelölése

Ideális műveleti erősítő bemeneti áramainak értéke 0, a kimeneti feszültség értéke csak a két bemeneti feszültség különbségének függvénye, kimenő impedanciája 0, teljesítményerősítése végtelen.

Megjegyezni kívánjuk, hogy definiálható szimmetrikus kimenetű műveleti erősítő-modell is.

A vezérelt generátorok alapparaméterei (A, D, H, R, G,) a kimeneti és bemeneti jel váltóáramú összetevőjének pillanatnyi értékei (u,i) között teremtenek kapcsolatot. A jel alakjától, a jel változási sebességétől függetlenek.

A műveleti erősítő „A” paramétere a bemeneti jelek különbségének nemcsak a váltóáramú komponensre, hanem — elvileg — a bemeneti jelek különbségének pillanatnyi értékére, így tehát az egyenáramú komponensekre is vonatkozik.

Fenti ideális elemekből már létrehozhatók a tényleges hálózatok, ahol az egyes alkotóelemeket az ideális elemekből összeállított helyettesítő képpel szerepeltetjük. Az egyes elemek helyettesítő képének megvalósításakor arra kell ügyelnünk, hogy a valószínűsíthető, vagy megadott $i(t)$ érték közelében az egyes reális elemeken eső $u(t)$ feszültségérték megfeleljen a valószínűsíthető, vagy megadott értéknek. Lassú áramváltozások esetén elhanyagolható lehet pl. az ellenállással jelölt alkatrész szórt indukciója, gyors változás esetén viszont nemcsak az induktivitást, hanem az ellenállás önkapacitását is figyelembe kell vennünk. Kondenzátor helyettesítő képének meghatározásakor lassú áramváltozás mellett érdemes figyelni a kondenzátor átvezetésére, gyors áramváltozás esetén a soros induktivitás nem hanyagolható el, és igen nagy meglepetéseket is okozhat.

Még bonyolultabb az áramköri modellezés aktív hálózatok esetén, melyek már a fent leírt aktív ideális modelleket is tartalmazzák. Figyelemmel kell lennünk többek között a beállított munkaponti értékekre, az aktív elemek dinamikus tulajdonságaira (a kimeneti jel alakjának, értékének változása a bemeneti jel különböző meredekségű változása esetén, stb.). Nem szabad elfelejtkeznünk a kimeneti jelnek a bemeneti jelre történő visszahatásáról sem.

2.3. Hálózat működésének elemzése (analízise) az időtartományban. Konvolúciós integrál, Duhamel-integrál

Ha az időtartományban kívánjuk elemezni a hálózat működését, úgy azt vizsgáljuk, hogy a hálózatot valamilyen referenciajellel gerjesztve a hálózat milyen feleletet ad. Ez a felelet, miként a gerjesztő-jel is lehet feszültség két megadott csomópont között, vagy áram valamely hurokban. A hálózatelmélet jelenlegi állása szerint az időtartományban a hálózatot teljes egészében leírja a *súlyfüggvény*, vagy az *átmeneti függvény*. Mindkét esetben a feleletet (áramot vagy feszültséget a megjelölt helyen) leíró idő-függvényt (jelet) vizsgáljuk úgy, hogy első esetben a gerjesztőjel Dirac-delta-jel, a második esetben pedig egységugrás (Heaviside-féle) jel.

Ez a két jel azért alkalmas a hálózat egyértelmű leírására, mert az így kapott felelet-függvények segítségével tetszőleges bemeneti jelre kiszámítható az adott hálózat felelete.

Az 1. fejezetben foglalkoztunk a Dirac-delta jellel. Mint ott megpróbáltuk kifejteni, maga a jel tulajdonképpen meghatározatlan (értékei rendre 0, határozatlan, 0), és definíciója szerint minden olyan impulzusjel Dirac-delta jel, melynél az impulzusidő végtelen kicsi ($\lim T \rightarrow 0$), a z impulzus alatti terület viszont egységnyi. (Az egység kiinduláskor függhet a villamos jel

típusától (feszültség, áram), s felvett időegységtől is (nsec, perc, óra), de a későbbiekben ehhez ragaszkodnunk kell. (célszerű a Vsec, Asec egységet választani).

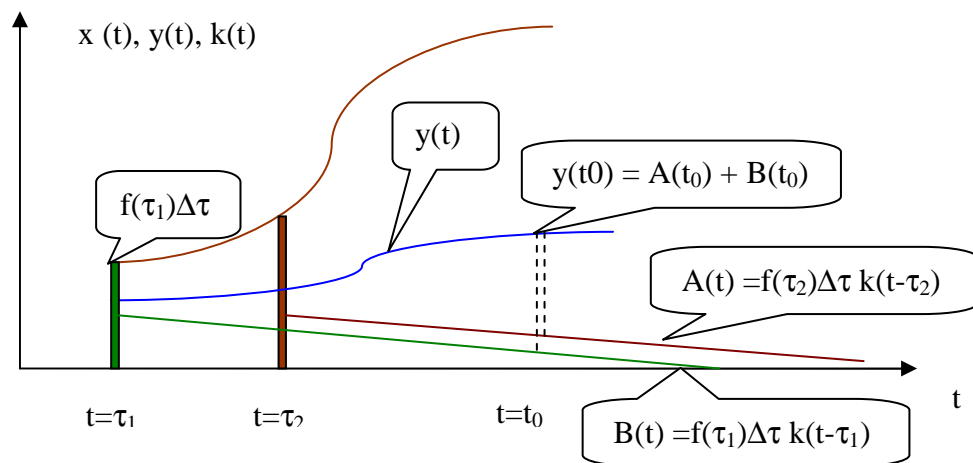
A 0 időpillanatban gerjesztett Dirac-delta jelre a lineáris hálózat az általunk megjelölt csomópontok között vagy hurokban súly-jellel válaszol, amely ennek megfelelően lehet $V(t)/Vsec$ (ha a kimenet feszültség, a Dirac delta jel alatti terület pedig $1Vsec$), vagy lehet akár $mA/Vnsec$, ha kimenet áram, a bemeneti jel alatti terület $1Vnsec$. Ha a gerjesztés valamely τ időpillanatban történik (a jel $\delta(t-\tau)$), akkor a súlyjel is $k(t-\tau)$ -ra módosul. (A $t-\tau$ argumentumoknak megfelelő súly-jel 0, ha a rendszer *kauzális*, azaz *oksági*.).

Ha a gerjesztőjel alatti terület nem egységnyi, hanem valamilyen $f(t)$ jelnek τ időpontban mérhető $f(\tau)$ értékének $\Delta\tau$ -vel történő szorzata, akkor a kimeneti jel nagysága erre a τ időpontban kapott impulzusra (2-4. ábra)

$$y(t, \tau) = f(\tau) \Delta\tau k(t-\tau). \quad (5)$$

Lineáris hálózatoknál az elemi gerjesztésekre adott feleletek összege egyenlő a gerjesztések összegére adott felelettel:

$$y(t) = \int_0^t f(\tau) k(t-\tau) d\tau \quad (6)$$

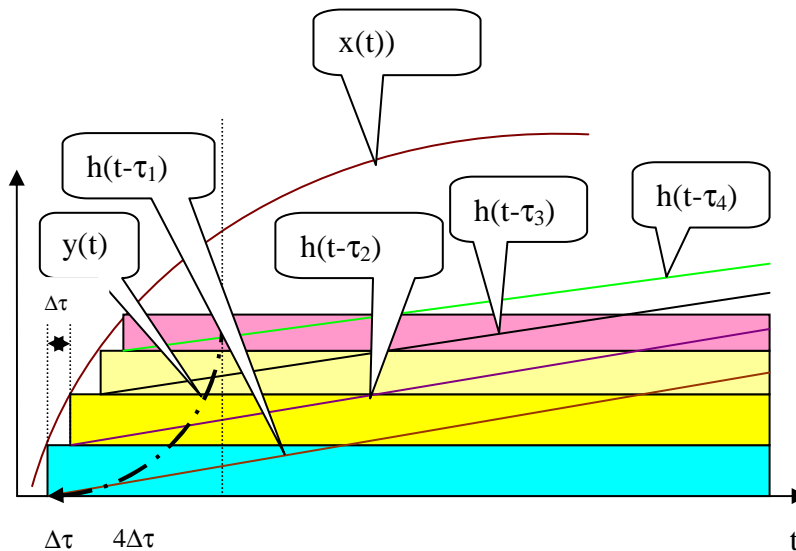


2-4. ábra. Konvolúció

A (6) egyenlet a konvolúciós integrál elnevezést viseli, s azt mutatja, hogy számíthatjuk ki a bemeneti jel és a súlyfüggvény ismeretében a kimeneti jelet lineáris hálózatoknál. Matematikailag természetesen ennek feltétele, hogy a bemeneti jelnek ne legyen szakadása, és (csak matematikailag, mert a villamosságban ez nem fordulhat elő), hogy egy adott t argumentumhoz csak egy $x(t)$ érték tartozhat.²⁸

²⁸ Némileg átrendezett formában nevezik ezt az egyenletet Faltung-féle f ormulának is.

A gyakorlatban gyakrabban használják a Duhamel-tételt (fizikailag könnyebben megközelíthető), mely a hálózat időtartományban történő elemzéséhez a Heaviside-féle egység-ugrásjelből, s az arra adott válaszjelből, az átmeneti jelből indul ki.



2-5. ábra. Duhamel-integrál

Az „elemi” egységugrás-jelek amplitúdója $x'(\tau) \Delta\tau$, ahol $x'(\tau)$ a bemeneti $x(t)$ jel adott τ időpillanatban mért differenciálhányadosa. (2-5. ábra)

Valamely t időpillanatban a kimeneti $y(t)$ jel a szuperpozíciós tétel alapján oly módon számítható, hogy összegezzük azoknak a $h(t-\tau)$ elemi egységugrás-jeleknek a hatását, melyekre nézve $\tau < t$, és nem feledkezünk el az $x(t)$ bemeneti jel $t=0$ értékéről sem:

$$y(t) = x(0)h(0) + \int_0^t \frac{\partial x}{\partial \tau} h(t - \tau) d\tau$$

az integrálás $\tau = 0$ pontból kezdve elegendő, mivel $x(t)$ determinisztikus, azaz $x(t)$ jel értéke 0, ha $t < 0$.

Fenti számításnál $x(t)$ jelre korlátozó tényező, hogy sem a jelnek, sem a jel első differenciálhányadosának nem lehet szakadása. („sima” jel).

2.4. Hálózat működésének elemzése a frekvenciatartományban. Komplex elektromos mennyiségek, idealizált modellekkel kapcsolatos összefüggések. Komplex hálózati jellemzők

A hálózat működésének leírásakor nagyságrendekkel egyszerűbb eredményeket kapunk, ha a bemeneti $x(t)$ gerjesztésre periodikus, harmonikus jelet választunk.

A mérnöki gyakorlatban a leggyakoribb gerjesztés sin vagy cos jel. Ezeknek a jeleknek azonban a differenciálhányadosa és integrálja is. az alapjel eltolt fázisú származtatottja. (4,5).

$$\frac{\partial(\cos \omega t)}{\partial t} = \omega \cos(\omega t + \pi/2) \quad \text{és} \quad \int \cos \omega t \, dt = \frac{\cos(\omega t - \pi/2)}{\omega} \quad (7)$$

Érdeemes foglalkoznunk az exponenciális jelekkel, még akkor is, ha ezek a jelek látszólag nem periodikusak:

$$\frac{\partial(e^{j\omega t})}{\partial t} = j\omega e^{j\omega t} \quad \text{és} \quad \int e^{j\omega t} \, dt = \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} \quad (8)$$

Matematikailag az exponenciális gerjesztés lenne ideális, de a valós kitevőjű jel egyrészt nem periodikus jel, (azaz mérésekre kevésbé alkalmas), másrészt a mérnöki gyakorlattól eltér. A problémát Leonard Euler²⁹ oldotta meg, kimutatva, hogy a sin-cos harmonikus jelek és az exponenciális jel között szoros összefüggés van, ami nem volt meglepő, hiszen mindhárom jel differenciál-hányadosa és integrálja is a jellel megegyező alakú.

Euler a Maclaurin-féle³⁰ sorbafejtés alapján igen egyszerűen vezette le közismert képletét. (A szög helyett a szögsebességnek (körfrekvenciának) és az idő szorzatának, valamint a „ φ ” kezdőfázisnak (a jel argumentumának $t=0$ időpontban felvett értékét) tüntettük fel.

$$\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi) = e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (9) \quad \mathcal{NB}$$

Az $e^{j\omega t}$ jel alkalmas arra, hogy lineáris hálózatoknál a gerjesztő $\cos \omega t$ jelet matematikailag helyettesítse, ha kikötjük, hogy a kimeneti jel esetében is csak annak valós komponensét vegyük figyelembe.

(A képzetes kitevőjű $e^{j\varphi}$ jel értéke $\varphi = \pi/2$ érték mellett $\cos \pi/2 + j \sin \pi/2 = j$; $\varphi = -\pi/2$ esetén $-j$; $\varphi = 0$ esetén 1 , $\varphi = \pi$ érték mellett pedig -1 , így látható, hogy a képzetes kitevőjű exponenciális jel beszorzása a „ j ” szimbólummal 90 fokos fáziseltérést, míg a „ $-j$ ” szimbólummal való osztás 90 fokos fáziskésést okoz. ez a későbbiekben láthatóan igazolja a \cos függvénynek a képzetes kitevőjű exponenciális függvénnyel történő cseréjét, 2-6. ábra)

Ezek szerint az idealizált induktivitáson átfolyó áram és az induktivitáson eső feszültség képzetes kitevőjű exponenciális gerjesztés esetén:

$$u(j\omega t) = j\omega L I_{\max} e^{j\omega t} \quad (10)$$

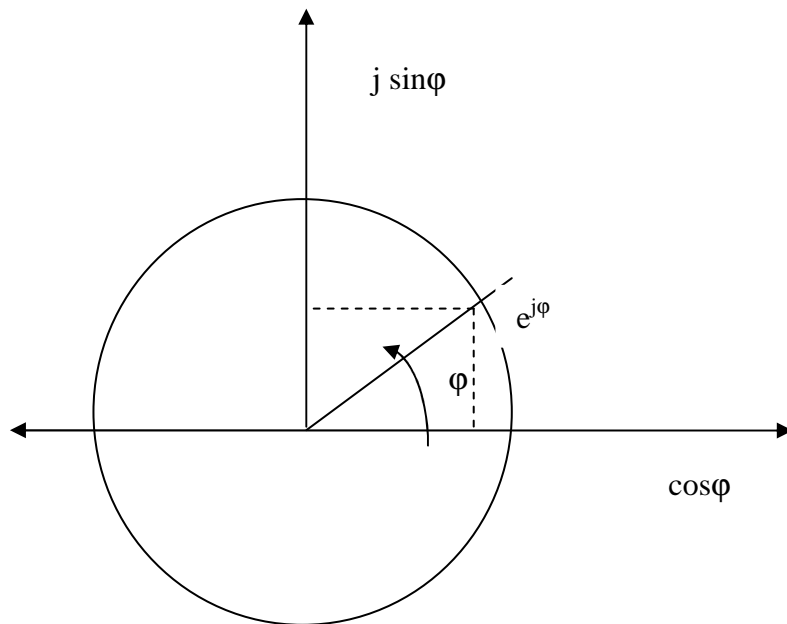
Bevezetve az $a(j\omega t) = \bar{A} e^{j\omega t}$ jelölést, ahol A , ill. a mind feszültségre, mind pedig áramra vonatkozik:

$$\bar{U} = \bar{I} j\omega L \quad \text{induktivitásra és} \quad \bar{U} = \bar{I} \frac{1}{j\omega C} \quad \text{kapacitásra.} \quad (11)$$

²⁹ Leonard Euler (1707, Basel — 1783, Szentpétervár), német (porosz) matematikus-fizikus-filozófus. Fenti képlete a villamosságtan modern korszakát nyitotta meg.

³⁰ Colin Maclaurin (1668, Kilmodan—1746, Edinburgh) skót matematikus. A „Maclauren” forma valószínűleg elírás.

(\bar{U} és \bar{I} úgy értelmezhetőek, mind olyan komplex értékek, melyek abszolút értéke az amplitúdó, a szög értéke pedig a kezdőfázis).



2-6. ábra Képzetes kitevőjű exponenciális függvény

Ideális induktivitásra ezek szerint definiálhatunk egy impedanciát, mely harmonikus gerjesztés esetén az induktivitáson eső feszültség és a rajta átfolyó áram hányadosa. Ez az érték az un. képzetes körfrekvencia, $j\omega$ függvénye lesz:

$$Z(j\omega) = j\omega L., \quad \text{illetve kapacitásra} \quad Z(j\omega) = 1/j\omega C \quad (12)$$

Hasonló a helyzet ideális kapacitás-elem estén is, ebben az esetben a „j” szorzó, mint már bemutattuk $e^{j\pi/2}$ kifejezéssel egyenlő, azaz a feszültségésnek az áramhoz képest jelentkező 90 fokos pozitív fáziseltolására utal.

Az ideális transzformátor egyenlete természetesen harmonikus gerjesztés esetében is igaz:

$$\bar{U}_1 = \bar{U}_2 / \bar{u}; \quad \bar{I}_1 = -\bar{I}_2 \bar{u}; \quad Z_1 = Z_2 / \bar{u}^2 \quad (13)$$

Ugyanez mondható el az ideális aktív vezérelt generátorokra, ill. műveleti erősítőkre is.

Foglaljuk össze, milyen sajátosságokat mutat a lineáris hálózat működésének leírása, ha kikötjük, hogy a gerjesztés harmónikus legyen:

1. A válaszjel (kimeneti jel, az egyes elemeken eső feszültség,- vagy áramérték) kiszámításához nincs szükség differenciálegyenletek megoldására;
2. Mind a gerjesztés(ek), mind a válaszjel (ek) leírásához nincs szükség időfüggvényre. Megállapodásunk szerint a gerjesztések $A \cos(\omega t + \varphi)$ egyenletnek felelnek meg, amit egyszerűen egyetlen komplex számmal jelölünk: $\bar{A} = A(\cos \varphi + j \sin \varphi)$. (Ha csak egy

gerjesztési bemenettel rendelkezünk, célszerű φ értékét 0-ra felvenni, ha többel, úgy az egyik gerjesztés kezdőfázisa általában 0, ez a referenciaérték.)

3. A hálózat működését leíró válasz-függvény a gerjesztésnek megfelelő alakú komplex szám, \bar{Y} , melynek az értéke a *körfrekvencia értékétől függő $Z=f(j\omega)$ impedanciaértékek* következtében is (általában) a bemeneti jel (képzetes) körfrekvenciájának a függvénye:

$$\bar{Y}(\omega) = X(j\omega) \frac{\bar{C}(j\omega)}{\bar{D}(j\omega)}, \text{ ahol mind } \bar{C}(j\omega), \text{ mind } \bar{D}(j\omega) \text{ függvények } j\omega \text{ polinomjai. (a valós}$$

tagokat a páros kitevőjű tagok, a képzetéseket a páratlan kitevőjű tagok írják le).

Lineáris hálózat esetén a gerjesztéstől független a hálózat *átviteli karakterisztikája*, azaz a válaszjel és a gerjesztés aránya::

$$\bar{K}(j\omega) = \frac{\bar{Y}(j\omega)}{\bar{X}(j\omega)} = \frac{\bar{N}(j\omega)}{\bar{M}(j\omega)} = \frac{N_0 + N_1 j\omega + N_2 (j\omega)^2 + N_3 (j\omega)^3 + \dots + N_n (j\omega)^n}{M_0 + M_1 j\omega + M_2 (j\omega)^2 + M_3 (j\omega)^3 + \dots + M_m (j\omega)^m} \quad (14) \mathcal{NB}$$

2.5. Reális hálózati elemek helyettesítő képei az idealizált elemek kombinációjával

Az átviteli karakterisztika számításakor nem szabad elfelejtenünk, hogy az általunk bevezetett ideális ellenállás, induktivitás, kapacitás, transzformátor csupán elemei annak a helyettesítő képnek, amivel a tényleges tekercseket, kondenzátorokat, transzformátorokat ábrázoljuk. Ez a helyettesítő kép általános esetben igen bonyolult, egyes esetekben komoly kikötéseket igényel, hogy egyáltalán a lineáris hálózatokon belül tudjuk ábrázolni (elektrolit kondenzátor), általában azonban a helyettesítő képek leegyszerűsíthetők, ha nem követelünk meg (nem is követelhetünk meg) nagy pontosságot, és a körfrekvenciára (frekvenciára) nézve is ismertek a működési terület alsó és felső határai.

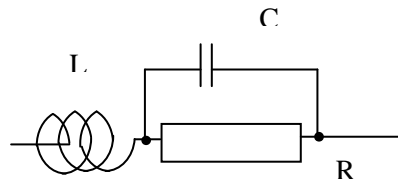
Ellenállások esetén lényeges lehet a soros indukció, vagy az önkapacitás. Kisebb értékű ellenállásoknál racionális megoldás a soros induktivitás ábrázolása, nagyobb értékű értékek esetén az önkapacitás figyelembevétele a célszerű: (2-7. ábra)

$$Z = j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC} \quad (15)$$

Kiemelve az R értékét, és bevezetve a $\omega_{0L} = R/L$, és az $\omega_{0C} = 1/RC$ helyettesítéseket kapjuk, hogy

$$Z = R \left(j \frac{\omega}{\omega_{0L}} + \frac{1}{1 + j\omega / \omega_{0C}} \right) \quad (16)$$

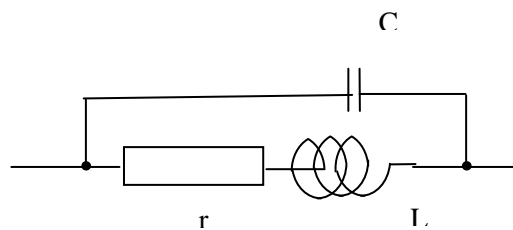
Kis értékű ellenállás $1\Omega - 10K\Omega$ esetén $\omega_{0C} \gg \omega_{0L}$, az $\omega < \omega_{0L}$ sávban a (13) egyenlet második tagja elhagyható. Ellenkező esetben az első tagot lehet elhagyni.



2-7. ábra Ellenállás helyettesítő képe idealizált elemekkel

Bonyolultabb a helyzet *kondenzátor vagy tekercs* esetén. Utóbbi esetben elképzelhető, hogy tekercsünk induktivitás helyett „kapacitívává” válik.

Önindukciós tekercs esetén figyelembe kell vennünk a tekercs soros ellenállását (ennek alacsony frekvenciákon van jelentősége), nagyfrekvenciákon viszont a tekercs önkapacitása lehet lényeges tényező.



2-8. ábra Önindukciós tekercs helyettesítő képe idealizált elemekkel

A 2-8. ábra alapján a tekercs impedanciája:

$$\bar{Z} = j\omega L + \frac{1 - j\omega / \omega_a}{1 - (\omega / \omega_0)^2 + j\omega\tau} \quad (17)$$

fenti egyenletben $\omega_a = L/r$, az az alsó határfrekvencia, ahol a tekercs impedanciájának abszolút értéke az „ideális” értékhez képest $\sqrt{2}$ -szeresére nő, (az önkapacitás ezen a frekvencián általában elhanyagolható,) a feszültség fázisa pedig az áram fázisához képest nem 90 fokkal siet, hanem csak 45 fokkal. ω_0 — a tekercs párhuzamos önrezonanciája, ha $r = 0$. $\tau = rC$.

Fentiekből jól látszik, hogy az alsó határfrekvencián a tekercs soros vesztesége már meghatározza az impedancia jellegét, míg a ω_0 frekvencia közelében a tekercs impedanciája megnő, és ismét a valós értékhez közelit. Valójában ez a kritikus frekvencia kisebb, mint az

³¹ A (14) egyenlet valójában egy párhuzamos rezgőkör impedancia- (kétpólus-) egyenlete.

ω_0 érték³². Ez a két érték, különösen az ω_0 meghatározza a tekercs működésének határait. (ω_0 felett a rendszer már kapacitív jellegű...)

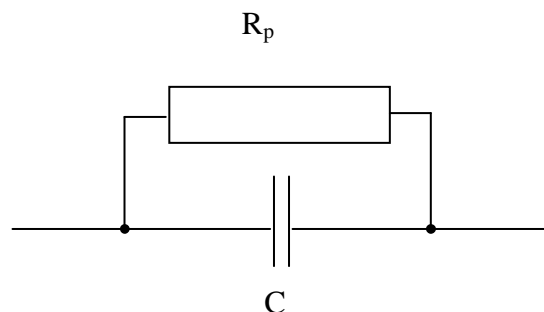
Rendszerint elegendő a tekercs soros veszteségének figyelembe vétele, ebben az esetben könnyen számítható a kondenzátortoknál meghatározott $\text{tg } \delta$ veszteségi tényező

$$\text{tg } \delta = r / j\omega L = 1 / j\omega \tau,$$

τ a tekercs „időállandója”, $\tau = L/r$,

illetve ennek reciproka, a Q_L , a tekercs jósági tényezője.

Kondenzátorok vizsgálatánál a legtöbb esetben elegendő a párhuzamos veszteség figyelembe vétele. (2-9. ábra)



2-9. ábra. Kondenzátor helyettesítő képe

A veszteséget a kondenzátor a valós és a „képzetes” teljesítménynek az aránya adja.

$$\text{tg } \delta = P / N = \frac{U^2}{R_p} / \frac{U^2}{1 / j\omega C} = \frac{1}{j\omega C R_p} \quad (18)$$

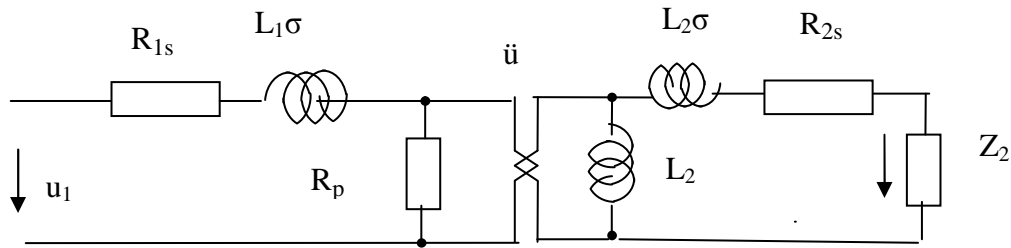
A kondenzátor „ Q ” jósági tényezőjét a $\text{tg } \delta$ reciprok értékeként definiáljuk

Ez az egyenlet csalóka, mert azt sugallja, hogy a veszteségi tényező kis frekvenciákon „végtelen”, majd a frekvencia növekedésével csökken. R_p értéke azonban nem frekvenciafüggetlen, ezért $\text{tg } \delta$ értéke a kondenzátorok típusától függően a frekvencia növekedésével általában enyhén nő, vagy csökken, minimum-vagy maximum frekvenciapontja létezhet, de semmiképpen nem csökken meredeken.

Bizonyos kondenzátortípusoknál nem hanyagolható el a soros induktivitás, egyes esetekben nem szabad elfelejtkeznünk arról sem, hogy az alkatrész nemlineáris elem.

³² Soros veszteséges tekercset tartalmazó párhuzamos rezgőkör, ill. párhuzamos veszteséggel modellezett kondenzátort tartalmazó soros rezgőkör rezonancia-körfrekvenciája a veszteség nélküli értéknél alacsonyabb: $(\omega_p)^2 = \omega_0^2 (1 - 1/Q_{LC}^2)$. Q_{LC} = a tekercs, ill. a kondenzátor jósági tényezője az eredeti rezonanciafrekvencián. (3.3 pont).

Valós transzformátor helyettesítő képe (2-10. ábra) az ideális modellre épülve figyelembe veszi a szórás (σ) értékét, a sorosan- és párhuzamosan kapcsolt ellenállás gyanánt ábrázolt réz- és vasveszteséget (r_s , R_p , előbbi érték a primer- és szekunder körök soros veszteségéből származik, felhasználva az ideális transzformátor $Z_1 = Z_2/\dot{u}^2$ impedancia-transzformáló egyenletét). A transzformátor a valóságban igen bonyolult működésű nemlineáris elem. Az egyes passzív alkatrészekkel részletesen a „Passzív áramkörök” kurzus foglalkozik.



2-10. ábra. Transzformátor helyettesítő képe

Aktív hálózatok esetén a helyettesítő kép létrehozása a reális működés modellezéséhez igen bonyolult feladat. Célszerű abból az ideális aktív elemből kiindulni, melynél a reális hálózat a legkevesebb kiegészítő elemmel helyettesíthető. (FET esetében nem túl célszerű áramvezérelt generátorból kiindulni, de földelt bázisú (CB) bipoláris tranzisztoros alapkapsolásnál egy áramvezérelt áramgenerátor nem rossz választás. Elektronikai tanulmányainkból ismert, hogy több helyettesítő kép (II- kép, T-kép) is felállítható, a tényleges működés közelítésére. Aktív hálózatok csak végtelen kis váltóáramú komponensű bemeneti jel esetén tekinthetők lineárisnak, a jel növelésével a modellezés egyre kevésbé tükrözi a hálózat tényleges működését.

2.6. A hálózatjellemzők érzékenysége

A 2.4. pontban vázlatosan foglalkoztunk a hálózat legfőbb jellemzőjével, az átviteli karakterisztikával, mely a hálózat válaszjelének és gerjesztésének hányadosa. Ezen kívül a hálózatnak egyéb jellemzői is vannak, úgymint. bemenő és kimenő impedancia, a kimeneti áram és bemeneti feszültség hányadosa (transzkonduktancia), a bemeneti áram és kimeneti feszültség hányadosa (inverz transzkonduktancia.). Még számtalan jellemző is definiálható, úgymint körjóság, rezonancia-frekvencia, a hálózat egyes részeinek jellemzői, stb.

Minden jellemző mérésénél feltételezzük, hogy a mérésben részt nem vevő villamos jellemzők (feszültség, áram) konstansak.

Valamennyi mérhető jellemző a hálózatot alkotó elemek értékének, ezen belül az egyes elemek paramétereinek függvénye. Egy párhuzamos rezgőkör önrezonanciája függ a rezgőkört alkotó elemek értékétől, ezen belül az elemek „belső” jellemzőitől is: a tekercs vesztesége, a kondenzátor veszteségi szöge, az egyes elemek hőre mutatott változása, de aktív hálózatoknál a nemlineáris elemek lineáris modelljének (vezérelt generátorok) jellemzői változhatnak a tápfeszültség változásakor, vagy annak szórásának függvényében is.

Mindez szükségessé tette, hogy definiáljuk a hálózat valamely jellemzője változásának a függését, azaz *a paraméter érzékenységét a hálózatot felépítő elemek értékeinek változására*.

A hálózatot alkotó elemek értéke ugyanis egyrészt már a gyártás folyamán eltérhet attól a névleges értéktől, amit a hálózat tervezésekor figyelembe vettünk, másrészt a egyrészt a külső körülmények (hőmérséklet, relatív páratartalom, esetleg külső mágneses tér), ill. egyéb tényezők (tápfeszültség, stb.), ill.. az elem „öregedése”, azaz fizikai és kémiai tulajdonságainak változásának hatására is módosul.

A mérnöki gyakorlatban azonban a hálózat valamely jellemzőjének (bemenő impedancia, átviteli karakterisztika) változását nem mindig lehet (vagy nem érdemes) „ráruházni” a hálózatot alkotó elemek értékének változására, érdemesebb az érzékenység fogalmát kiterjeszteni az adott jellemzőnek valamely — a hálózat szempontjából külső — körülmény (tápfeszültség, hőmérséklet, stb.) változására.

Legfontosabb érzékenységi mutatók:

Abszolút érzékenység (sensitivity, S) az adott jellemzőnek a megfelelő alkotóelem, vagy körülmény (hőmérséklet, tápfeszültség) értéke szerint képzett parciális differenciálhányadosa.

$$S_{y,x} = \frac{\partial y}{\partial x} . \quad (19) \mathcal{NB}$$

Ennek a mutatónak a mértékegysége természetesen bármi lehet: lehet akár dB/ ohm, dB/C°, vagy V/F, esetleg Hz/ tgδ...

Gyakran használjuk a *relatív érzékenységet*, itt azt vizsgáljuk, hogy az adott elem, vagy körülmény értékének *relatív* változása mekkora relatív változást vált ki a hálózatjellemben:

$$S_{r,y,x} = \frac{\partial y / y}{\partial x / x} \quad (20) \mathcal{NB}$$

Igen elegáns, és elterjedt a fenti egyenlet alábbi, a (17)-egyenlettel teljesen azonos alakja:

$$S_{r,y,x} = \frac{\partial(\ln y)}{\partial(\ln x)}$$

Ez a mutató minden esetben mértékegység nélküli. (Ha igen kis, értéket kapunk, szoktunk használni olyan dimenziókat, mint pl. $\mu V/V$, stb.)

Gyakran használjuk a két S érték kombinációját, leggyakrabban az y érték relatív változását vetítjük az x abszolút változására, ilyen a jól ismert TK (hőmérsékleti tényező) érték,

Valamely aktív hálózat $\bar{K}(j\omega)$ karakterisztikájának TK értéke az alábbi:

$TK_{\bar{K}} = \frac{\partial K/K}{\partial T}$ — mint látjuk, a számlálóban relatív, míg a nevezőben abszolút változást szerepeltetünk. A TK mértékegysége ismert módon $\%/C^0$, vagy $\%/K$ (Itt a „K” a Kelvin fokot jelöli). Napjainkban a TK érték már oly csekély, hogy a mértékegységben „%” helyett a „ppm”(„parts per million”, azaz milliomodrész, — 10^{-6}) értéket használjuk.

2.6.1. Példa érzékenységek számítására

Számítsuk ki egy L és C elemekből álló soros rezgőkör rezonancia-körfrekvenciájának a tekercs induktivitásához viszonyított abszolút és relatív érzékenységét

A rezonancia frekvencia értékét az alábbi képlet határozza meg: (elnézést)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

A rezonancia körfrekvencia értékének az indukcióhoz viszonyított abszolút érzékenysége

$$S_{\omega_0, L} = -\frac{1}{2L\sqrt{LC}} = -\frac{\omega_0}{2L} \text{ Rad / sec.Hy}$$

A relatív érzékenység:

$$S_{r\omega_0, L} = -\frac{d(\ln \omega)}{d(\ln L)}$$

$$S_{r\omega_0, L} = -\frac{d(\ln \omega)}{d(\ln L)} ;$$

mivel $\ln \omega = -\ln \sqrt{LC}$, így $d(\ln \omega) = -\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)\left(\frac{\sqrt{C}}{2\sqrt{L}}\right)dL = -\frac{dL}{2L}$

$$S_{r\omega_0, L} = -\frac{d(\ln \omega)}{d(\ln L)} = -1/2$$

2.7. A hálózat alkotó elemeinek toleranciaparaméterei

Az érzékenységi paraméterek választ adtak arra, hogy az egyes elemek változása milyen hatást gyakorol a hálózatjellemzőkre. A kérdés azonban legtöbbször fordított, és igen nehezen megválaszolható: Adott mértékű (pl. relatív) hálózatjellemző-változásnak (nevezzük ezt megengedett értéknek) a hálózatot alkotó elemek milyen mértékű (legyen ez is relatív) változása, azaz *milyen mértékű toleranciája* (tűrése) felel meg?

Ezt a feladatot megoldani csak igen egyszerű esetekben sikerül, s megoldásként egy *toleranciatérben* találjuk magunkat. A toleranciatérnek annyi dimenziója van, ahány elemnek a megengedhető toleranciáját vizsgáljuk. Ez lehet 1, 2, száz, ... "n".. A megoldást egy egyenesekkel határolt általános jellegű „n” dimenziós alakzat, a *toleranciatartomány* szolgáltatja, melynek a belseje az egyes elemek elfogadható értékeit tartalmazza, a „héja” pedig az értékhatárokat. Ha az adott elem névleges értéke és tűrése a hálózatparaméterek értékei és megengedett értékhatárai alapján számítható, akkor toleranciatartomány zárt.

Egy nagyon egyszerű példán illusztráljuk mindezt. Legyen a „hálózatunk” egy feszültségosztó, mely 2 elemből, két egyszerű ellenállásból áll. Vizsgáljunk két „hálózatjellemzőt”: A szükséges K_0 átviteli karakterisztikát (jelen esetben frekvenciafüggetlen), és a Z_0 bemenő impedanciát. (Ez valós érték, és szintén frekvenciafüggetlen.) Legyen a 2 ellenállás értéke R_1 és R_2 . R_1 értékeit az „x”, R_2 értékeit az „y” tengelyen ábrázoljuk. $n=2$, a toleranciatér tehát sík. (2-11. ábra)

Mivel $K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$, $R_2 = R_1 \frac{K}{1-K}$, ez egy origón átmenő egyenes egyenlete. K névleges értékeinek megfelelő egyenes szaggatott, a határoknak megfelelő egyenesek viszont folytonos vonalakkal jelöltek. Láthatjuk, hogy a toleranciatérből kihasított toleranciatartomány egyelőre még nyitott.

Zárttá akkor válik, ha meghatározzuk a Z_0 értéknek megfelelő $R_1 + R_2$ párok értékeit is. Ha $R_2=0$, $R_1=Z_0$; Ha $R_1=0$, $R_2=Z_0$. Ez tehát egy az $X=Z_0$ pontot $Y=Z_0$ ponttal összekötő 45 fokos egyenes ($R_2 = Z_0 - R_1$). Z_0 névleges értékének, és adott tűréshatároknak megfelelő egyenesek jelölése megegyezik az átviteli karakterisztika esetében leírtakkal: (2-11. ábra)

kisebb tűrés, mint ellenállásoknál, míg bipoláris tranzisztorok esetén szinte lehetetlen kis tűrésű érték beszerzése, stb.).

A téglalap oldalai alapján láthatók a szükséges „ ε ” értékek. Ennek ismerete alapján megoldhatjuk a feladatot.

Általánosabb esetben a toleranciatest „ n ” dimenziójú.

Ellenőrző kérdések:

1. Mit nevezünk lineáris hálózatnak?
2. Mondjunk példát a közel ideális feszültségvezérelt áramgenerátorra! (Bemenő és kimenő impedancia $\approx \infty$.)
3. Miért lényeges a hálózat súlyfüggvényének és átmeneti függvényének az ismerete?
4. Mi az a konvolúciós integrál?
5. Miért előnyös, ha a hálózat működését harmonikus gerjesztés mellett vizsgáljuk?
6. Mi a hálózat átviteli karakterisztikája?
7. Mit nevezünk valamely hálózati jellemző valamely hálózati elemre vonatkoztatott relatív érzékenységének? Mennyiben jellemző ennek az érzékenységnek a mértékegysége a hálózati elemre?
8. Mi a különbség a reális és ideális transzformátor helyettesítőképei között?
9. Mi a különbség a toleranciatest és a toleranciatartomány között?

III. Transzformációk. Átlépés az időtartományból a frekvenciatartomány(ok)ba³³

3.1. Fourier-transzformáció Vonalas spektrum

A hálózat időtartományi vizsgálatánál speciális jelek által keltett gerjesztésekből [$\delta(t)$, $1(t)$] indultunk ki, és a konvolúciós integrál, ill. a Duhamel-integrál segítségével mutattuk be, hogy az előbbi jelekre adott válaszjel [$k(t)$, $h(t)$] segítségével hogyan számíthatjuk ki a hálózat válaszát más gerjesztésekre is.

Az előző alfejezetben azonban azt is láthattuk, mennyire leegyszerűsíti a hálózat elemzését, ha a gerjesztés harmonikus jel. Láttuk, hogy harmonikus gerjesztések esetén megszabadulhatunk az integrálás és differenciálás nyűgétől, és a hálózat válaszát ilyen jellegű gerjesztésekre egyszerű matematikai képlet – két polinom hányadosa — írja le:

$$\bar{K}(j\omega) = \frac{N_0 + N_1 j\omega + \dots + N_n (j\omega)^n}{M_0 + M_1 j\omega + \dots + M_m (j\omega)^m} = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} N_i (j\omega)^i}{\sum_{i=0}^{i=m} M_i (j\omega)^i} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

Ez a *transzfer karakterisztika* lehetővé teszi, hogy harmonikus gerjesztés esetén egyszerű eszközökkel ki tudjuk számolni a kimeneti jel amplitúdóját és fáziskülönbségét is a bemeneti jel nagyságának és frekvenciájának a függvényében. $A(\omega)$ a transzfer karakterisztika abszolút értékét fejezi ki, ezért ismert módon amplitúdó-karakterisztikának, míg a $\varphi(\omega)$ az átviteli karakterisztika fázisviszonyait képviseli, így ezt fáziskarakterisztikának nevezzük. Ezek a függvények nem az idő, hanem a körfrekvencia függvényei, (a harmonikus jelek, mint az idő függvényei matematikai leírásakor tulajdonképpen csak az amplitúdót és a fáziskülönbséget kell meghatároznunk) így harmonikus gerjesztés esetén fenti polinomokkal az időtartományból a (kör)frekvenciatartományba lépünk át. A gondunkat csak az okozza, hogy —kikötésünk szerint— a bemeneti jel csak adott körfrekvenciájú és kezdőfázisú harmonikus jel lehet.

Fourier³⁴ szerencsére kimutatta, hogy bizonyos matematikai feltételek teljesítése esetén³⁵ a jeleket *harmonikus jelek összegeként* is felfoghatjuk. Amennyiben a bemeneti $x(t)$ jel

³³ A többes szám arra utal, hogy – mint látni fogjuk — a (kör)frekvencia fogalmát definiálhatjuk — a fizikai értelemezéshez hűbben — tisztán képzetes változóként, de definiálhatjuk — túllépve a szűken vett fizikai értelmezésen — komplex változóként is. (Fourier és Laplace-féle transzformáció)

³⁴ **François Marie Charles Fourier** (1772. április 7. – 1837. október 10.) francia filozófus, utópista szocialista.

³⁵ nem periodikus jelek esetén a függvénynek konvergensenek kell lennie, azaz a függvény időszerinti $-\infty$ és $+\infty$ határok közötti határozott integráljának véges értéknek kell lennie. Periodikus jelek esetén - mint matematikai

periodikus, ezek a jelek olyan harmonikusok, melyek körfrekvenciája az $x(t)$ jel körfrekvenciájának (ω), egész számú többszöröse. (Ezt a jel-összegzést nevezzük *Fourier-sornak*.) A harmonikus jeleket képzetes $j\omega$ kitevőjű exponenciális jel formájában is értelmezhetjük, ahol n pozitív és negatív előjelű tetszőleges természetes szám³⁶:

$$k(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \bar{C}(nj\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \quad (1) \mathcal{NB}$$

$\bar{C}(nj\omega_0)$ ³⁷ - komplex szám, abszolút értéke az adott $n\omega_0$ körfrekvenciájú harmonikus jel amplitúdója, a szög értéke $[\varphi = \arctg \frac{\text{Im}(\bar{C}(nj\omega_0))}{\text{Re}(\bar{C}(nj\omega_0))}]$ pedig a harmonikus kezdőfázisa

A mérnöki gyakorlatban gyakran okoz problémát a negatív körfrekvencia értelmezése. Mivel azonban

$$\cos \omega t = 1/2 (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}), \quad (2)^{38},$$

vagyis minden valós körfrekvenciájú koszinusz-jelet felírhatunk két komplex részjel összegeként, melyek közül az egyik pozitív, a másik pedig negatív körfrekvenciájú.

A periodikus jel sorbafejtése során tehát $\bar{C}(nj\omega_0)$ és $\bar{C}(-nj\omega_0)$ értékek párosával fordulnak elő olyképpen, hogy abszolút értékük megegyezik, a kezdőfázis viszont pontosan ellenkező; azaz konjugált komplex párokat alkotnak. Mint ismeretes, ezeket csillaggal különböztetjük meg, azaz

$$\bar{C}(nj\omega) = \bar{C}(-nj\omega)^*$$

Az eredeti periodikus $x(t)$ jelet így cos és sin jelek összege helyett *képzetes kitevőjű exponenciális jelek összegévé* alakítottuk át. Jelöljük a bemeneti jel sorbafejtésekor kapott $\bar{X}(nj\omega)$ jelek amplitúdó értékeit (az együttható abszolút értékét) rendre $X(jn\omega)$ -val, a kezdőfázisokat pedig $\varphi(jn\omega)$ -val. Ábrázoljuk ezeket az értékeket külön-külön a $j\omega$ képzetes körfrekvencia függvényében. A kapott függvényeket a bemeneti periodikus jel *spektrumának* nevezzük. (3-8. ábra)

A spektrum tehát az egyes származtatott $jn\omega_0 t$ kitevőjű exponenciális jelek komplex együtthatója (amplitúdója és kezdőfázisa). A spektrumértékeknek a kiszámítására a Fourier-transzformáció szerint a következő egyenlet szolgál:

tanulmányainkból ismeretes - Fourier fenti feltételt csak a periódusidőre vonatkoztatta, de egyéb feltételeket is kikötött.

³⁶ Az Euler-féle formula szerint.

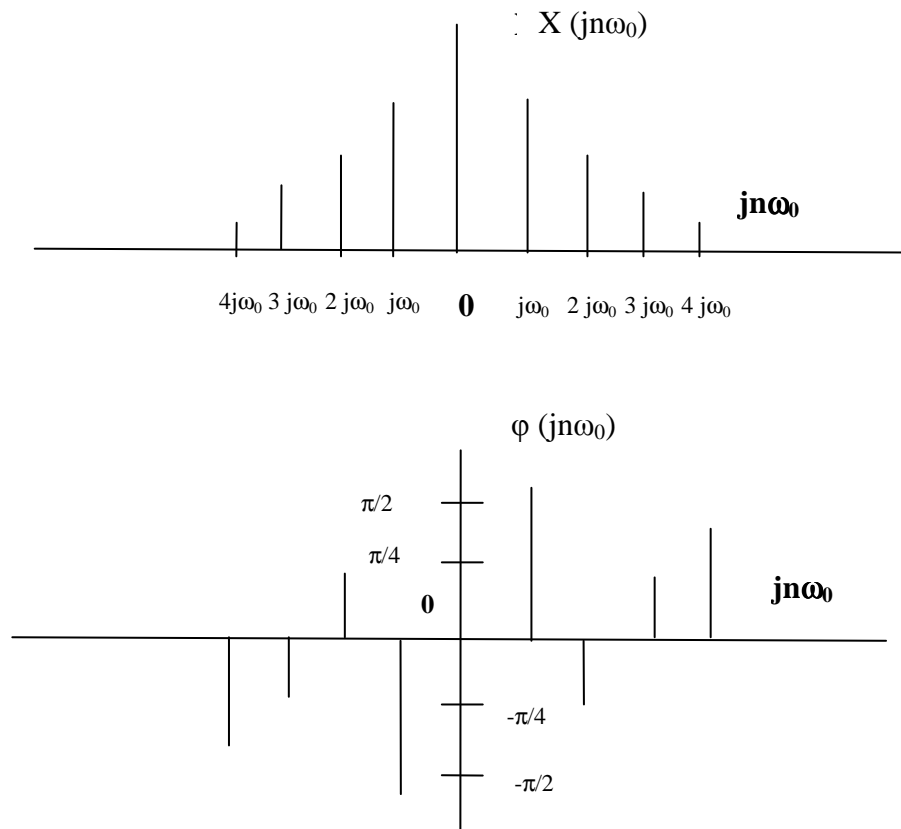
³⁷ Ne keverjük össze az átmeneti karakterisztikával... Amennyiben az eredeti periódikus jel nem függvénye ω_0 -nak, úgy K sem, .

³⁸ Ez az Euler-féle képletből következik.

$$\bar{X}(j\omega) = \bar{X}(jn\omega_0) = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3), \mathcal{NB}$$

ahol T az eredeti x(t) jel periódusideje. $T = 1/f$, azaz $2\pi/\omega$.

Az egyenletnek „két baloldala” van, ami arra utal, hogy a transzformált jelet csak az eredeti $j\omega_0$ körfrekvencia pozitív és negatív egész számú többszöröse értékeinél értelmezzük.



3-1. ábra. Periodikus függvény spektruma
(ω_0 az eredeti jel körfrekvenciája)

Periodikus függvény spektruma vonalas.

Az $x(t) \rightarrow \bar{X}(jn\omega_0)$ transzformáció elvégzése lehetővé teszi a kimeneti $\bar{Y}(jn\omega_0)$ spektrum kiszámítását. A lineáris hálózatokra vonatkozó szuperpozíciós törvény szerint ugyanis a kimeneti jel spektrumát a hálózat $\bar{K}(jn\omega_0)$ átviteli karakterisztikájának és a bemeneti jel $\bar{X}(jn\omega_0)$ spektrumának egyszerű összeszorozásával kaphatjuk meg:

$$\bar{Y}(jn\omega_0) = \bar{K}(jn\omega_0)[\bar{X}(jn\omega_0)] \quad (4) \mathcal{NB}$$

3.2. Aperiodikus jel Fourier-transzformációja. Folytonos spektrum

A (3) egyenletünk megmutatta, hogyan képezzük valamilyen $T = 2\pi/\omega_0$ periódusidejű $X(t)$ jelből Fourier-transzformációval az egyes $j\omega_0$ körfrekvenciákhoz tartozó $\bar{X}(jn\omega_0)$ értékeket. \mathcal{NB}

Gondolatban „nyújtjuk ki” az $x(t)$ jelet, azaz végezzük el az $x't = x(t/q)$ transzformációt. „q” növelésével ω_0 értéke csökken, így az új spektrum vonalai egyre közelebb kerülnek egymáshoz. Végtelen nagy periódusidő esetén a $X(j\omega)$ függvény folytonossá válik. Míg a periodikus jelek esetén olyan „vonalas” spektrumról beszéltünk, melyeknél az egyes $n\omega_0$ értékekhez tartozó függvényértékek abszolút értékeinek mértékegysége megegyezett az eredeti $x(t)$ függvényével (ha az $x(t)$ függvény feszültséget jelölt, akkor az egyes $X(n\omega_0)$ értékek is feszültséget jelölnek;), ebben az esetben már spektrumsűrűségről kell beszélnünk, melynek már más a mértékegysége, mint az eredeti jellé.

A spektrumsűrűséghez úgy juthatunk el legegyszerűbben, hogy már vonalas spektrum esetén az egyes diszkrét értékekhez $j\omega_0$ „szélességű” $j\omega$ értékeket rendelünk. Azután ezen a területen az $\bar{X}(jn\omega_0)$ értéket egy olyan téglalap területének tekintjük, melynek „alapja” az ω_0 körfrekvencia, „magassága” pedig a $\bar{X}(jn\omega_0)/j\omega_0$ érték. Ez az érték az $S(jn\omega_0)$ spektrumsűrűség, elvileg komplex mennyiség, mértékegysége az eredeti jel fizikai mértékegysége.sec/Rad.

$$\bar{S}_x(jn\omega_0) = \bar{X}(jn\omega_0)/j\omega_0 = 1/T\omega_0 \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = 1/2\pi \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (5) \mathcal{NB}$$

A spektrumsűrűség mértékegysége az eredeti példából kiindulva Vsec/rad.

T értékét végtelenségig növelve ω_0 értéke $\bar{X}(jn\omega_0)$ értékkel együtt a 0-hoz tart, a spektrumsűrűséget tehát a $\lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \bar{X}(jn\omega_0)/\omega_0$ határérték szerint kell számítanunk. Az „ $n\omega_0$ ” jelölést természetesen „ ω ” jelölés váltja fel:

$$\bar{S}_x(j\omega) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (6)$$

A gyakorlatban ennek 2π -szeresével dolgozunk.

$$\bar{F}_x(j\omega) = \mathcal{F}(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (7) \mathcal{NB}$$

A hálózat kimenetének $F_y(j\omega)$ spektrumsűrűségét ebben az esetben is a bemenet $F_x(j\omega)$ spektrumsűrűségének és a hálózat $\bar{K}(j\omega)$ átviteli karakterisztikájának a szorzata adja.

Ha vissza kívánunk térni az időtengelyhez, nem diszkrét értékeket összegzünk, hanem a sűrűségértékeket integrálnunk kell:

$$f(t) = \mathcal{I}^{-1} \bar{F}(j\omega) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}_x(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (8)$$

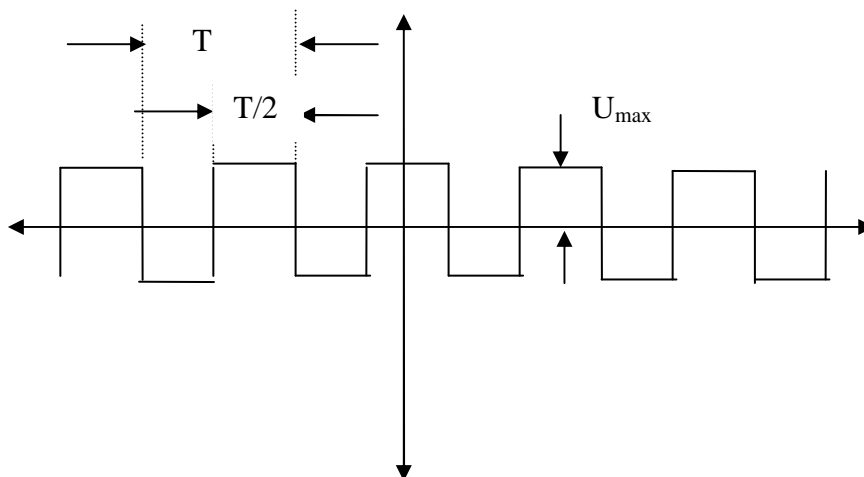
(Vissza kell szorozni az „ellopott” $1/2\pi$ -t)

A (8) egyenletet folytonos Fourier-transzformációnak, a (9) egyenletet pedig Fourier-integrálnak nevezzük. A \mathcal{I} jelölés Fourier-féle transzformációt, a \mathcal{I}^{-1} jel pedig Fourier-integrált jelöl. NB

Mindkét művelet elvégzésének kritériuma, hogy az $f(t)$ jel legyen konvergens, azaz a jel $-\infty$ (kauzális jel esetén 0) és ∞ közötti integrálja (a jel alatti terület) legyen véges. Ez általában behatárolja a transzformálható jelek halmazát.

Az alábbiakban néhány jel Fourier-transzformáltját, közöljük:

Szimmetrikus négyszögjel (3-2 ábra)



3-2. ábra. Periodikus szimmetrikus négyszögjel

$$\bar{X}(jn\omega_0) = \frac{2}{(2n+1)\pi} e^{j(2n+1)\pi/4} \quad (\text{az alapfrekvenciának csak páratlan többszöröse, képzetes}$$

együtthatók (színuszjel)

A $\delta(t)$ Dirac-delta jel $\delta(t)$ transzformáltja:

$$\mathfrak{S}[\delta(t)] = 1 \quad (9a)$$

Ennek alapján a hálózatnak a $\delta(t)$ jelre adott válaszában a Fourier-transzformáltja egyenlő a hálózat átviteli karakterisztikájával. Mivel a jel spektruma független ω előjelétől, és valós, a $\delta(t)$ függvény páros függvény. (ld. 15. oldal, 15. lábjegyzet) Mivel a hálózatnak a $\delta(t)$ jelre adott válaszát súlyfüggvénynek nevezzük (15. oldal), ez nem más, mint az átviteli karakterisztika Fourier-integrálja:

$$\boxed{k(t) = \mathfrak{S}^{-1}[\bar{K}(j\omega)]} \quad (9b) \text{ NB}$$

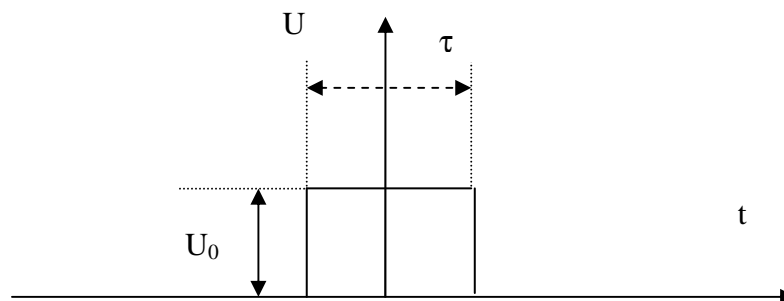
Az $1(t)$ Heaviside-jel transzformáltja:

$$\mathfrak{S}[1(t)] = \frac{1}{j\omega} \quad (9c)$$

$x(t) = U_0 e^{-t/\tau}$ transzformáltja:

$$\mathfrak{S}[x(t)] = U_0 \frac{\tau}{(1 + j\omega\tau)} \quad (9d)$$

Külön figyelmet érdemel a $t=0$ értékre szimmetrikus „magányos pulzus” (3-3. ábra), mint a periodikus négyszögjel aperiodikus „megfelelője”



3-3. ábra. Aperiodikus impulzus jel.

Az ilyen $x(t)$ jel Fourier-transzformáltja:

$$\mathfrak{S}(x[t]) = \frac{e^{-j\omega\tau/2}}{-j\omega} \quad (9e)$$

A Fourier-féle transzformáció azokban az esetekben ad jelentős előnyt, ha a hálózat elemzésekor a frekvenciatartománybeli viselkedés a lényeges. Előnye, hogy jó fizikai képet ad a hálózat működéséről. Hátránya a számítás bonyolultsága, és a transzformálható jelek behatároltsága. Mint látni fogjuk, gondot okoz az un. „gyöktényező alak”-ra történő áttérés is. A transzformáció módosítása a fizikai kép némi elbonyolódása mellett a számítások leegyszerűsítését hozza magával.

3.3. Lineáris hálózat által okozott jeltorzítások („Lineáris torzítások”)

Az ideális amplitúdó-karakterisztika a bemeneti jel spektrális komponenseit tartalmazó sávban konstans:

$$A(\omega) = \text{cons.}$$

Ha a hálózat $A(\omega)$ amplitúdó-átvitele ebben a tartományban nem ideális, azaz $A(\omega)$ értéke nem konstans, az átviendő jel alakja annak következtében, hogy a különböző spektrális összetevői számára az átvitel értéke nem egyforma, torzulást szenved. *Az amplitúdó-karakterisztikának az ideálistól eltérő jellegéből következő jeltorzításokat amplitúdó-torzításoknak nevezzük.*

Az $A(\omega)$ karakterisztikán kívül a lineáris hálózat $\varphi(\omega)$ fáziskarakterisztikája is jeltorzulást okozhat.

Az adott „ ω ” körfrekvenciájú spektrális komponensre nézve a $\varphi(\omega)/\omega$ hányados a „*futási idő*”, azaz az adott komponensnek a hálózat be- és kimenet között mérhető áthaladási idejét szabja meg.

Ha ez a futási idő valamennyi komponensre nézve ugyanakkora, úgy a jel — ebből a szempontból — nem szenved torzulást. Ebben az esetben a $\varphi(\omega)$ karakterisztika (lineáris koordináta-ábrázolás mellett) lineáris, és áthalad az origón.

Ha a karakterisztika nem lineáris, a jel különböző komponensei számára a futási időkülönbség, a hálózat kimenetén ezek a komponensek eltolva jelentkeznek, s a jel sajátos torzulást szenved, amit *fázistorzításnak* nevezünk.

Az ideális fáziskarakterisztika lineáris a jel komponenseit tartalmazó sávban:

$$t = \frac{\varphi}{\omega} = \text{cons}$$

Itt jegyezzük meg, hogy ez csak abban az esetben igaz, amikor a jel spektruma „0” ω -értékre szimmetrikusan helyezkedik el. Ha a jel spektruma valamely adott ω_0 értékkel „eltolt” spektrum, (II. kötet- moduláció), azaz a spektrum ω_0 értékre szimmetrikus, úgy nem a futási idő, hanem az un. csoportfutási idő állandó értéke a lényeges:

$$t_{cs} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \text{cons.} \quad (1)$$

A csoportfutási idő nem abszolút, hanem relatív érték, és azt mutatja meg, hogy valamely ω körfrekvenciájú komponens futási ideje mennyiben különbözik egy adott ω_0 komponens futási idejéhez képest.

A $\varphi(\omega)$ karakterisztikának elvileg lineárisnak kell lennie abban a (kör)frekvenciatartományban, ahol a jel spektrális összetevői találhatóak.

Az amplitúdó- és fázistorzításokat együttesen lineáris torzításoknak nevezzük. Közös sajátosságuk, hogy bár a hálózat a különböző spektrális komponenseket különböző csillapítással, (amplitúdó-torzítás) és különböző késleltetéssel, vagy sietéssel (fázistorzítás) viszi át, de a hálózat kimenetén a bemenettel megegyező körfrekvenciájú komponenseket mérhetünk, azaz nem jönnek létre új spektrális összetevők.

3.4 Laplace³⁹-transzformáció. Komplex változó bevezetése

A $\bar{K}(j\omega)$ és $\bar{Y}(j\omega)$ karakterisztikák elemzését leegyszerűsítene az un. gyöktényezős alak bevezetése, mivel a polinomokat a gyökök és valamilyen konstans szorzó teljes egészében meghatározzák, így elegendő lenne a gyökökkel foglalkozni.

Ezek a gyökök a képzetes változójú polinomoknál azonban általában nem képzetes mennyiségek, hanem komplex számok. Adódik tehát a komplex változó bevezetése, mert így mind a változó, mind a gyökök kétdimenziós mennyiségek.⁴⁰

A Fourier-transzformáció $j\omega$ változója helyett vezessük be – Laplace javaslatára — az „s”⁴¹ komplex változót. „s” valós komponensét jelöljük a „ σ ” jellel, a képzetes komponens pedig legyen a Fourier-transzformáció $j\omega$ változója..

$$\mathbf{s = \sigma + j\omega} \quad (10)$$

Az $x(t)$ jelből az

$$\bar{X}(s) = L[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (11) \mathcal{NB}$$

„Laplace transzformáció” művelettel térhetünk át a Laplace-transzformáltra. A hálózatot leíró $\bar{K}(s)$ függvény komplex függő változót tartalmaz, akárcsak az „s” független változó. A függvény ábrázolására bizonyos egyszerű esetekben alkalmas lehet a $|\bar{K}(s)| = K(s)$ (amplitúdó) és az arc $\bar{K}(s) = \varphi(s)$ összefüggések együttes vizsgálata. Bonyolultabb esetekben

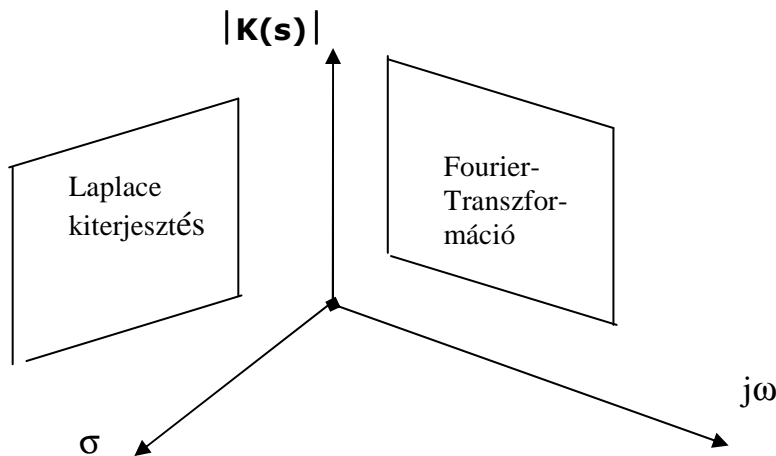
³⁹ **Pierre Simon Laplace** (Beaumont-en-Auge, [Normandia, 1749. március 23.](#) – [Párizs, 1827. március 5.](#)) francia matematikus, csillagász és fizikus (egyes források szerint születési időpontja március 28.). Régebbi tanulmányainkból csillagászati tevékenysége lehet ismerős („Kant-Laplace elmélet” a Naprendszer keletkezéséről)

⁴⁰ Ez egy matematikai értelmezés. Feltételezzük, hogy a Laplace-transzformáció matematikai oldalát az olvasó már ismeri.

⁴¹ gyakran találkozunk a „p” elnevezéssel is

mind az $|\bar{K}(s)|$, mind az $\text{arc } \bar{K}(s)$ összefüggést háromdimenziósan kell ábrázolni, ezek közül az $|\bar{K}(s)| = f(\sigma, j\omega)$ összefüggést illusztrálja a 3-4. ábra.

Az „s” változót a $j\omega$ értékekhez való rokonsága alapján komplex frekvenciának is szokás nevezni. A $\bar{K}(s)$ függvény megegyezik a $\bar{K}(j\omega)$ függvénnyel, ha elvégezzük a $j\omega \rightarrow s$ helyettesítést.



3-4. ábra. Laplace transzformáció

A bemeneti jelet leíró $\bar{X}(s)$ függvénynek és a $\bar{K}(s)$ függvénynek a szorzata ebben az esetben is a kimenet $\bar{Y}(s)$ Laplace-transzformáltját adja.

A (9) egyenlet sor alkalmazható Laplace transzformációra is, amennyiben a „ $j\omega$ ” változót „s”-re cseréljük, így a Dirac-jel transzformáltja:

$L[\delta(t)] = 1, \quad \text{a hálózat súlyfüggvénye } k(t) = L^{-1}[\bar{K}(s)] \quad (11a)$

Az „ L^{-1} ” műveleti jel un. inverz Laplace-transzformációt jelent, azaz visszatérést az időtartományba:

$y(t) = L^{-1}[\bar{Y}(s)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{Y}(s) e^{st} ds \quad (11b)$

A Heaviside-függvény transzformáltja természetesen $L[1(t)] = \frac{1}{s} \quad (11c)$
--

Az $x(t) = U_0 e^{-t/\tau}$ jel transzformáltja pedig $L[x(t)] = U_0 \frac{\tau}{(1 + s\tau)} \quad (11d)$
--

Mint ahogy azonban a bevezetőben már említettük, a Laplace-transzformáció nem bonyolítja, hanem egyszerűsíti a hálózat átviteli tulajdonságainak elemzését. A $\bar{K}(s)$ átviteli függvényt, vagy az $\bar{X}(s)$ bemeneti és az $\bar{Y}(s)$ kimeneti függvényt ugyanis *nem szokás az s függvényében*

ábrázolni. Helyette az „s” komplex változónak azokat az értékeit ábrázoljuk, ahol az általunk vizsgált $f(s)$ függvény értéke 0, illetve ∞ . (Mindkét esetben valós értékek).

A hálózat Laplace-transzformált transzfer függvénye, $\bar{K}(s)$, a $\bar{K}(j\omega)$ karakterisztikához hasonlóan mindig kifejezhető két polinom hányadosaként:

$$\bar{K}(s) = \frac{N_n s^n + N_{n-1} s^{n-1} + \dots + N_1 s + N_0}{M_m s^m + M_{m-1} s^{m-1} + \dots + M_1 s + M_0} = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} N_i s^i}{\sum_{i=0}^{i=m} M_i s^i} \quad (12) \quad \mathcal{NB}$$

(N_i és M_i valós együtthatók)

A Laplace transzformált alak már alkalmas arra, hogy gyöktényezős alakra bontsuk, mivel az „s” független változó maga is komplex.

Az $A(s)$ „m”-ed fokú polinom gyöktényezős alakja

$$A(s) = A(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n) \quad \text{még szebben:}$$

$$A(s) = A \prod_{i=1}^{i=n} (s - s_i) \quad (13)$$

ahol $x_1 \dots x_n$ az $A(s) = 0$ egyenlet gyökei.

Az s_i gyököket behelyettesítve a z $N(s)$ polinomba, „0” értéket kell kapnunk, ehhez az „x” változót kell valamely x_i gyökkel egyenlővé tennünk, és ekkor a polinom értéke 0-val lesz

$$\text{egyenlő. } N(s_i) = k \prod_{i=1}^{i=n} (s_i - s_i) = 0 \quad (14)$$

A transzfer függvény '0' helyeinek (ezeket nevezzük *zérushelyeknek*), ill. „ ∞ ” végtelen helyeinek megállapításához (ezek a *pólushelyek*) a (12) egyenletben a számlálóban és a nevezőben szereplő polinomokat a gyöktényezős alakkal érdemes helyettesíteni:

$$\bar{K}(s) = \frac{\bar{N}(s)}{\bar{M}(s)} = l \frac{\prod_{i=1}^{i=m} (s - s_i')}{\prod_{i=1}^{i=n} s - s_i''} \quad (14a) \quad \mathcal{NB}$$

A $\bar{K}(s)$ függvényt tehát teljes egészében leírja, sőt akár helyettesíti is, ha csak k értékét és s_i' valamint s_i'' értékeit adjuk meg. Előbbiek képviselik a zérushelyeket, utóbbiak pedig a pólushelyeket, mivel a számláló, $[\lim_{s \rightarrow s_i'} \bar{K}(s) = 0]$, illetve a nevező „0” értékeit $[\lim_{s \rightarrow s_i''} \bar{K}(s) = \infty]$ eredményezik. „s” zérushelyeknek megfelelő „s'_i” értékeit zérusoknak nevezzük, és „o”jellel, míg a függvény pólushelyeinek megfelelő „s''_i” pólusokat „x” jellel

ábrázoljuk, így a 3-4. ábra háromdimenziós rendszeréből csak az „ $x-y \rightarrow \sigma-j\omega$ ” síkra van szükség (3-6. ábra). Ami az „ l ” értékét illeti, ez nem más, mint az eredeti $K(s)$ polinom

$\frac{N_n}{M_m}$ hányadosa. (Ennek megértéséhez írjunk fel egy másodfokú egyenletet először

$y=ax^2+bx+c$, majd

$y = k(x-x_1)(x-x_2)$, azaz gyöktényezős alakban. Azonnal kibukik, hogy „ k ” nem más, mint „ a ” értéke.)

3.4.1. Egyszerű áramkörök átviteli függvényeinek elemzése. Első- és másodfokú alaptagok (RC áramkörök, rezgőkörök) átviteli függvényei

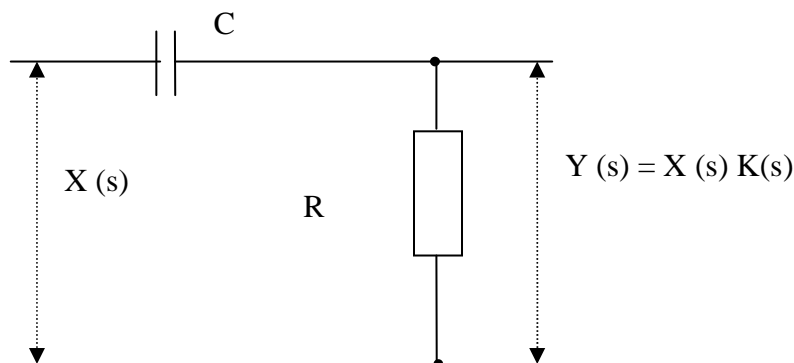
A 3-5. ábra egy elég egyszerű lineáris, passzív hálózatot ábrázol (, az időtartományi szemlélet szerint „differenciáló” áramkör). Az áramkör két ideális áramköri modellt használ: ellenállást és kapacitást.

Az áramkör $\bar{K}(s)$ átviteli függvénye⁴²

$\bar{K}(s) = \frac{s\tau}{1+s\tau}$ ($\tau = RC$ szorzat, a rendszer „időállandója”) egy zérus értékkel ($s'_1=0$), és egy

pólusértékkel ($s''_1=-1/\tau$) rendelkezik. A zérust és a pólust a 3-6. ábra mutatja.

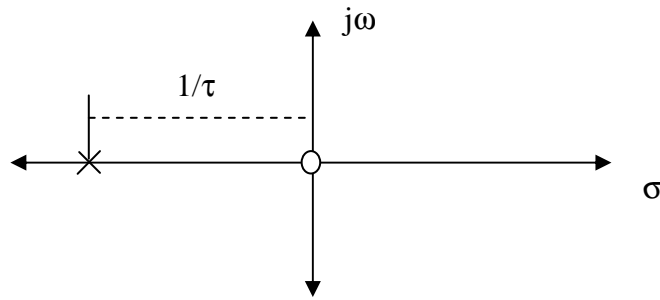
A 3-5. ábrán látható kapcsolással még meg tudunk volna birkózni Fourier-transzformációval is, ($s=j\omega$ helyettesítéssel), de ha a kondenzátorral egy induktivitás-moddellel ábrázolt tekercset is sorba kapcsolunk, azaz *soros rezgőkört hozunk létre* (3-7. ábra), már szükség van a Laplace-transzformációra:



3-5. ábra. Differenciáló áramkör

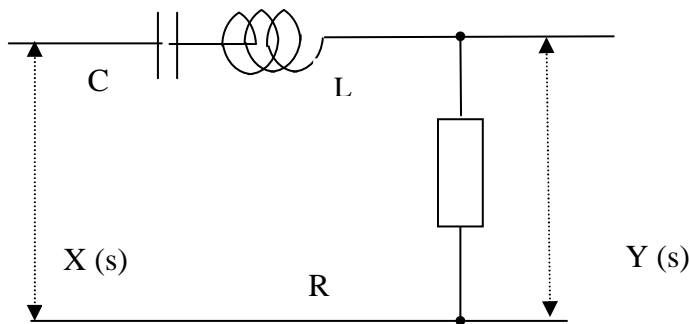
⁴² A $K(s)$ átviteli függvényt — eltérően $\bar{K}(j\omega)$ függvénytől — nem nevezzük átviteli karakterisztikának. (U.L.)

$$\bar{K}(s) = \frac{s\tau}{s^2/\omega_0^2 + s\tau + 1}, \text{ ahol } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



3-6. ábra

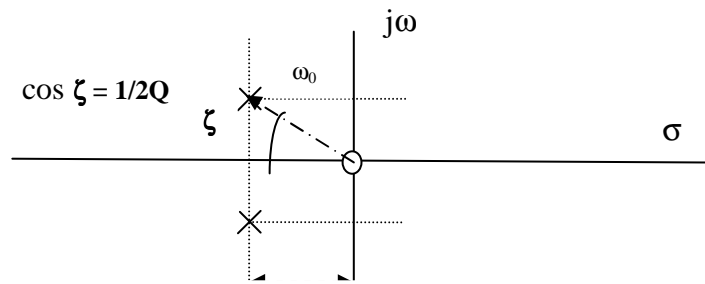
A 3-5. ábra áramkörének $K(s)$ átviteli függvénye zérus-pólus ábrázolással



3-7. ábra.

Rezgőkör

(Az 5. ábrán látható differenciáló tag kiegészítése egy önindukciós tekerccsel)



3-8. ábra. A 3-7. ábra áramkörének $K(s)$ átviteli függvénye pólus-zérus-ábrázolással

(A pólusoknak az origótól mért távolsága rögzített L és C értékek mellett Q értékétől független)

A továbbiakban az ilyen ún. „másodfokú alaptagnál” (az „ s ” a négyzetben is szerepel) a τ helyett a $\tau=1/\omega_0 Q$ szorzatot használjuk. ω_0 — az áramkör ún. törésponti-körfrekvenciája, (3.6. pontban fogjuk tárgyalni) ami **ebben az esetben** megegyezik a rezgőkör ω_r rezonancia-körfrekvenciájával. Ezen a ω_r körfrekvencián az áramkör bemenő impedanciája **valós érték**.

Soros rezgőkör esetén a rezonancia-körfrekvencián az áram értéke maximális, esetiünkben a bemenet és a kimenet között fáziseltolódás nincs.

Q -val az un. körjóságot jelöljük. A körjóság a rezgőkört felépítő elemek (tekercs és kondenzátor — esetiünkben a soros R ellenállást célszerű a tekercs soros veszteségéhez sorolni—) jósági tényezőinek un. „replusz” eredője (az egyes jósági tényezőket a törésponti frekvencián kell mérni) — meghatározása a jósági tényezők meghatározásából következően: Harmonikus gerjesztés mellett a törésponti frekvencián a rezgőkör reaktáns elemein mérhető képzetes teljesítménynek az aránya a rezgőkör valós **össz**teljesítményéhez.⁴³

Esetünkben $Q = \omega_0 L / R$

A nevező egyszerű másodfokú egyenlet, melynek megoldása után a pólusok értékét az alábbi egyenlet fejezi ki:

$$\boxed{\bar{s}_{1,2} = \omega_0[-1/2Q \pm j(\sqrt{1-1/4Q^2})]} \quad (15) \text{ NB}$$

Miután $s = \sigma + j\omega$, érdemes nyilvántartani a pólusok valós és képzetes összetevőit

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= -\omega_0 / 2Q \\ \omega_{1,2} &= \pm \omega_0 \sqrt{1-1/4Q^2} \end{aligned}} \quad (15a)$$

Számítsuk ki az alábbiakat: (konjugált komplex pólusok esetén)

- 1, a pólusok távolsága az origótól;
- 2, A pólusokat az origóval összekötő egyenes és a $-\sigma$ tengely által bezárt ζ ⁴⁴ szögnek (pontosabban: annak koszinuszának) az értéke

$$1, \quad \boxed{|s_{12}| = \omega_0[(-1/2Q)^2 + 1-1/4Q^2]} = \omega_0 \quad 16 \text{ NB}$$

$$2, \quad \boxed{\cos \zeta = \frac{-\operatorname{Re}(s_{12})}{|s_{12}|} = \frac{\omega_0 / 2Q}{\omega_0} = \frac{1}{2Q}} \quad (16a) \text{ NB}$$

A (16)és (16a) egyenletek alapján a másodfokú tag konjugált komplex pólusainak (ha léteznek) az origótól való távolsága az áramkör ω_0 törésponti frekvenciájával egyezik, (ez a távolság nem függ a körjóságtól,) a ζ szög koszinuszának abszolút értéke pedig az áramkör körjósága kétszeres értékének a reciproka (ld. 3-10. ábra).

⁴³ A Q körjóságot azonban az esetek többségében nem az ω , rezonancia-körfrekvencián, hanem az ω_0 törésponti frekvencián mérik. ω_0 , melynek értéke mindig $1/\sqrt{LC}$, az esetek egy részében – soros rezgőkör esetén pl. a kondenzátorral párhuzamosan kötött, vagy modellezett R ellenállás, párhuzamos rezgőkör esetén a tekercssel sorba kötött, vagy modellezett r ellenállás esetén — nem egyezik meg az ω , értékkel.

⁴⁴ „zéta” szög

Ennek az áramkörnek a kapcsolási rajza a 3-7. ábrán, a zérus-pólus ábrázolása a 3-8. ábrán látható. (Maga az áramkör egy ún. másodfokú sávszűrő elem egy lehetséges kivitelezése.)

Mint látható, a Laplace-transzformáció óriási előnye, hogy tetszőleges bonyolultságú hálózatot le tudunk írni zérusaival és pólusaival. Másik – itt sajnos bővebben ki nem fejthető előnye, hogy a visszatérés az időtengelyre — az ún. *inverz Laplace-transzformáció* — $(x(t)=\mathcal{L}^{-1}[X(s)]$ — művelete „leegyszerűsödik”, nincs szükség ω szerinti integrálásra, mint a Fourier-integrál esetében.

3.5. Inverz Laplace-transzformáció (Visszatérés az időtartományba)

Az inverz Laplace-transzformáció általános alakja:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Y(s)e^{st}ds \quad (11b)$$

A Laplace-transzformációs függvényből, azaz a komplex-frekvenciatartományból a pólusok ismeretében az időtartományba aránylag egyszerűen vissza lehet térni az ún. *kifejtési tétel* segítségével.

A kifejtési tétel tárgyalásához térjünk vissza a (12) egyenletre:

$$\bar{K}(s)=\frac{N_n s^m+N_{n-1} s^{n-1}+\dots+N_1 s+N_0}{M_m s^n+M_{m-1} s^{n-1}+\dots+M_1 s+M_0}=\frac{\sum_{i=0}^{i=n} N_i s^i}{\sum_{i=0}^{i=m} M_i s^i} \quad (12)$$

$$\bar{Y}(s)=\bar{X}(s)\bar{K}(s)=\frac{C(s)}{D(s)} \text{ — Az eredmény két polinom hányadosa.}$$

A kifejtési tétel szerint az időtartományba való áttéréshez

a., Ki kell számítanunk a kimeneti függvény pólusait: s_1'' , s_2'' , s_3'' ... s_n'' .

b., A nevezőben szereplő polinomot deriválnunk kell

c., A jel exponenciális függvények összege lesz, minden egyes tag egy-egy pólust képvisel az alábbiak szerint:

$$Y(t)_i=\frac{\bar{C}(s''_i)}{s''_i\frac{\partial\bar{D}}{\partial s}(s''_i)}e^{s''_i t} \quad (17)$$

Amennyiben a bemeneti jel Dirac-delta, úgy a kimeneti jel a hálózat súlyfüggvényének kifejtését adja.

Igen fontos, hogy a kifejtésnél a zérusok nem játszanak szerepet, csak maga a $C(s)$ függvény, de az $Y(t)$ tag értéket a pólusok behelyettesítésével kapjuk. (Zérusokkal 0-t kapnánk.) A nevezőnél pedig nem az eredeti polinom, hanem annak (s) szerinti deriváltjába kell behelyettesítenünk a pólusok értékét. (Így a nevező sem válik feltétlenül 0-vá).

d., Az adott tagokat összegezzük. A tagok számát a nevező fokszáma határozza meg.:

$$Y(t) = L^{-1}[\bar{Y}(s)] = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\bar{C}(s''_i)}{\frac{\partial \bar{D}}{\partial s}(s''_i)} e^{s''_i t} \quad (18)$$

Megjegyzések:

Fenti tételt csak akkor használhatjuk, ha $\bar{Y}(s)$ valódi tört. Áltört esetén először a polinomok hányadosát valódi törtté kell alakítani.

Nem használható a tétel többszörös pólusok esetén sem (a másodfokú tagok Q -ja nem lehet $1/2!$, [20. sz. egyenlet])

Miután az egyes tagok esetében az exponenciális függvények együtthatói komplex mennyiségek, célszerű áttérni

az együtthatók abszolút értékének $\left[\frac{\bar{A}(s''_i)}{\frac{\partial \bar{B}}{\partial s}(s''_i)} \right]$, valamint az együttható arc értékének a számítására. Az adott tag

esetén az abszolút érték lehet az együttható, a kapott φ szög pedig az exponens additív tagját képviseli (fázistolás)

A (18) egyenlet természetesen alkalmazható a hálózat súlyfüggvényének számításához is, ami magának a $K(s)$ átviteli függvénynek a kifejtése:

$$k(t)_i = \left[\frac{\bar{C}(s''_i)}{\frac{\partial \bar{D}}{\partial s}(s''_i)} \right] e^{(s''_i t) + \varphi} \quad (19)$$

3.6. A Laplace-traszformáció egyszerű alkalmazása: Másodfokú „aluláteresztő” alaptag pólusainak és zérusainak függése az áramkörben szereplő modellek értékeitől

Tekintsük a 3-9. ábrán szereplő egyszerű másodfokú alaptagot .

Ez a másodfokú tag egyébként az aluláteresztő szűrők másodfokú építőkövének egyik lehetséges kivitele. (VI. fejezet; A kapcsoláson a 3.7. ábrához képest az ellenállás és a kondenzátor „helyet cseréltek”)

Az áramkör három idealizált elemet tartalmaz, átviteli függvényét azonban az elsődleges LRC értékekből származtatott két másodlagos mennyiség, az $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ törésponti⁴⁵ körfrekvencia és a Q körjóság-érték — az ω_0 rezonancia-körfrekvencián mérhető $Z_L=\omega_0L=Z_C=1/\omega_0C$ értéknek, (az un. „hullámimpedancia”⁴⁶ értékének), és a kör R veszteségi ellenállásának a hányadosa— határozza meg.

Az első esetben az áramkör törésponti frekvenciáját tekintjük változatlanak, és vizsgáljuk meg a pólusok helyzetét a körjóság függvényében. (Egyszerűség kedvéért: az L és C elemek értékét rögzítsük, és az R értékét változtassuk).

Az áramkör Laplace-átviteli függvénye

$$\boxed{\bar{K}(s) = \frac{1}{s^2 / \omega_0^2 + s / \omega_0 Q + 1}} \quad (19a) \text{ NB}$$

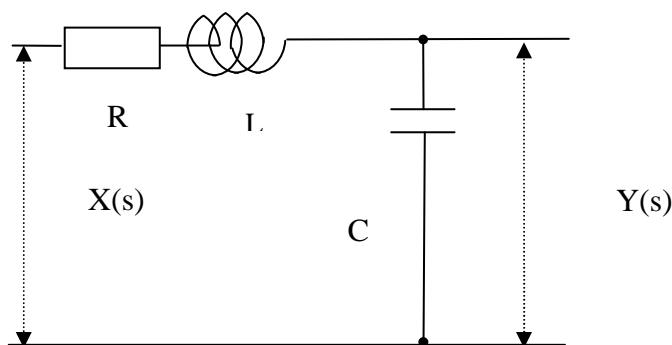
(nagyon hasonlít a 3-7. ábra kapcsolásának transzfer függvényére, csak a számláló értéke 1, azaz hiányzik az origóban levő zérus).⁴⁷

A nevező gyökeinek az egyenlete (ismétlés)

$$s_{1,2} = \omega_0 [-1/2Q \pm j(\sqrt{1 - 1/4Q^2})] \quad (15)$$

A gyökök által meghatározott pólusok helyzetének vizsgálatánál legfontosabb annak a kritikus körjóságnak (más szavakkal: *kritikus csillapításnak*) a megállapítása, amely többszörös valós gyököt eredményez. Ennek a feltétele a diszkrimináns 0 értéke, azaz

$$\boxed{Q_{kr} = 1/2} \quad (20) \text{ NB}$$



3-9. ábra.
Aluláteresztő szűrő
másodfokú alaptag
(passzív hálózat)

⁴⁵ A „töréspont” elnevezés a Bode-diagram-ból származik. (24. oldal, legelső mondat)

⁴⁶ A „hullámimpedancia” kifejezés a távíró-egyenleteknél kap fizikai értelmet. Sajnálattalunkra is ezzel a témakörrel a jegyzet nem foglalkozik.

⁴⁷ A 9. ábrán látható áramkörnek valóban ez az átviteli függvény felel meg, de ez visszafelé már nem igaz: más kapcsolásnak is megfeleltethető ugyanez az átviteli függvény, olyan áramköröknek is, melyek önindukciós tekercset nem is tartalmaznak. A rezonancia-frekvencia ebben az esetben a bemenő impedancia valós értékének megfelelő frekvencia, a törési frekvencia és a körjóság viszont az átviteli függvény alapján határozandó meg.

A többszörös valós pólus értéke pedig $-\omega_0$.

Ennél kisebb Q értékek esetén (15) alapján egy adott Q érték két külön egyszeres valós gyököt, azaz pólust határoz meg, melyek közül az origóhoz közelebbi érték kisebb, míg a másik nagyobb- ω_0 értékénél, a két valós pólus értékének mértani közepe a másodfokú egyenletnél megismert okok miatt $-\omega_0$.

Q kis értékei ($Q \ll 1/2$) esetén az „alsó” pólus értéke 0 körüli érték (negatív), míg a „felső” pólusé $-\omega_0/Q$ körüli érték.

$Q > Q_{kr}$, esetén a pólusok konjugált komplex párokat ($\sigma_0 \pm j\omega_0$) képeznek.

A konjugált komplex gyököknek az origótól mért távolsága az alábbi módon számítható: (ismétlés)

$$r_{s_{12}} = \sqrt{[\operatorname{Re}(s_{12})]^2 + [\operatorname{Im}(s_{12})]^2} = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1 - \frac{1}{4Q^2}} = \omega_0 \quad (16) \text{ NB}$$

A pólusoknak az origótól mért távolsága a 8. ábra szerint látható módon független Q értékétől, és ω_0 értékével egyenlő, azaz a pólusok Q növelésével ω_0 sugarú körpályát írnak le a kritikus csillapításnak megfelelő $Q=1/2$ értéktől (σ tengely metszése) $Q=\infty$ értékig ($j\omega$ tengely metszése).⁴⁸

A pólusokat az origóval összekötő egyeneseknek a σ tengellyel bezárt szöge (a 8. ábrán ζ -val jelöltük) Q függvénye:

$$\zeta = \arccos \frac{1}{2Q}, \text{ azaz } \sigma_i = -\frac{\omega_{0i}}{2Q} \quad (16a, 20a)$$

Q növelésével ζ értéke a -90 fok felé tart, azaz a pólusok a $j\omega$ tengelyhez közelednek.

Láthattuk, hogy ennél az áramkörnél a pólusok (az előző példánál a zérus és a pólusok) valós ordinátáira mindig teljesült a

$$\sigma_i \leq 0$$

egyenlőtlenség, azaz a pólusok/zérusok a koordináta rendszer bal oldali részén (2., 3., sík-negyedben) helyezkedtek el.

A megvalósítható villamos hálózatok lehetséges átviteli függvényei (a **megengedett függvények**) valamennyien olyan polinomokat tartalmaznak, melyek gyökei ezekben a félsíkokban helyezkednek el.⁴⁹

⁴⁸ Megismételtük a 13. oldalon leírtakat, nem véletlenül.

⁴⁹ Ezeket a polinomokat Hurwitz-polinomoknak nevezzük.

Az áramkör Laplace-átviteli függvénye egyben a kimeneti jel Laplace-transzformáltja is, ha a bemeneti jel Laplace transzformáltja $\bar{X}(s)$ értéke „1”. Mint ismeretes, ez megfelel a bemeneti Dirac-delta gerjesztésnek.

Ebben az esetben a kimeneti jel

$$y(t) = L^{-1}[y(s) = 1/2(e^{s_1 t} + e^{s_2 t})] \quad (21)$$

feltéve, hogy a pólusok nem többszörösek

$Q > 1/2$ esetben az egyenlet az alábbiak szerint alakítható át:

$$y(t) = L^{-1}[y(s)] = \frac{k}{2j}(e^{s_1 t} + e^{s_2 t}) = \frac{ke^{\sigma t}}{2j}(e^{j(\omega t)} + e^{-j(\omega t)}) = ke^{\sigma t} \sin \omega t \quad (22)$$

Miután σ értéke negatív, az áramkör Dirac-delta-jel gerjesztésre adott felelete, a súlyfüggvény — csillapodó rezgés. Nagy körjóság esetén a rezgés frekvenciája közelít a rezonanciafrekvenciához, a csillapodási tényező pedig a 0 értékhez, azaz a rezgés ideje egyre hosszabb. $Q = 1/2$ értékhez közeledve a rezgés frekvenciája egyre kisebb, a csillapodási tényező pedig egyre nagyobb, közelít ω_0 abszolút értékéhez.

$Q < 1/2$ -nél kisebb értékei mellett az áramkör felelete 2 különböző időállandójú, exponenciális függvény összege: (kifejtési tétel)

$$k(t) = L^{-1}[K(s)] = k(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \quad (23)$$

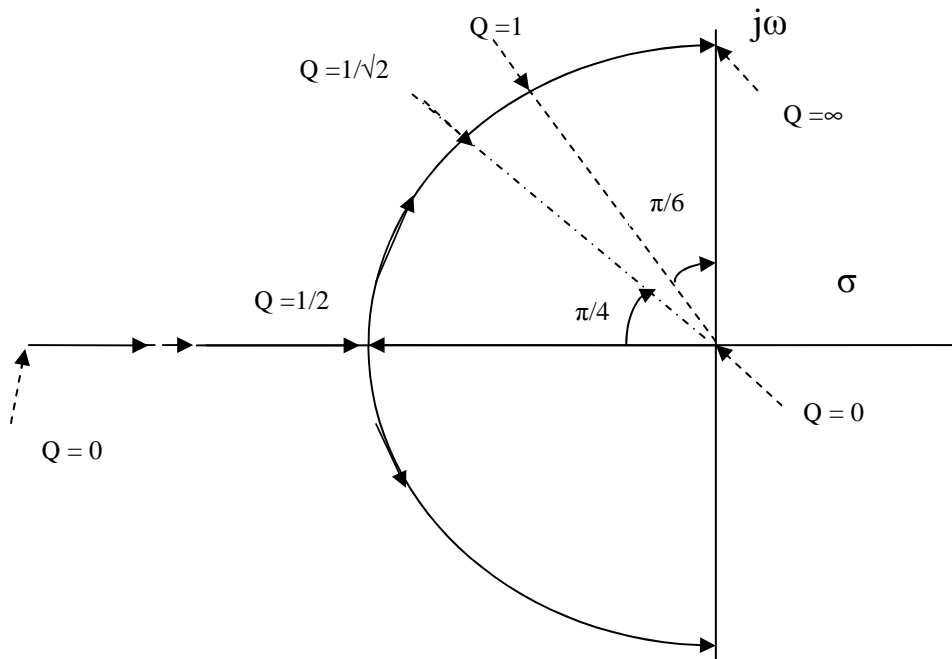
.Az első tag az origóhoz közelebb eső pólust képviseli, azaz „lassúbb”. A második tag a ω_0 értéknél abszolút értékben nagyobb „ σ ” értéket képviseli, azaz „gyorsabban fut le. A kettő eredőjeként a jel kb. a távolabbi pólus által meghatározott nagy sebességgel éri el maximumát, majd az origóhoz közelebbi pólus által meghatározott jóval kisebb sebességgel tart a 0 érték felé.

A mérnöki gyakorlatban gyakran R és C értéke adott, és „L” értékét kell kiszámítanunk valamely feladat megoldásához.. Az RC szorzat reciprok értéket jelöljük ω_e -vel, s most azt vizsgáljuk, hogy adott ω_e mellett Q folyamatos változtatása esetén milyen helygörbét kapunk a pólusokra.

A (15) egyenletet $\omega_0 = \omega_e/Q$ helyettesítéssel módosítjuk:

$$\bar{s}_{1,2} = \omega_e \frac{-1/2Q \pm \sqrt{1/4Q^2 - 1}}{Q} \quad (24)$$

Miután Q valós szám, ezért a pólusok új helyzete minden egyes pontban a 10. ábrán látható helyzethez képest $1/Q$ aktuális értékével történő szorzásával kapható meg. A pólusnak az origóval összekötő egyenes iránytangense nem változik, a távolság viszont $1/Q$ értékkel „megnyúlik”. Gondot csak a $Q=0$ érték okoz, (A 10. ábrán a póluspár a $\sigma = 0$, ill. a $\sigma = -\infty$ pozíciót foglalja el.)

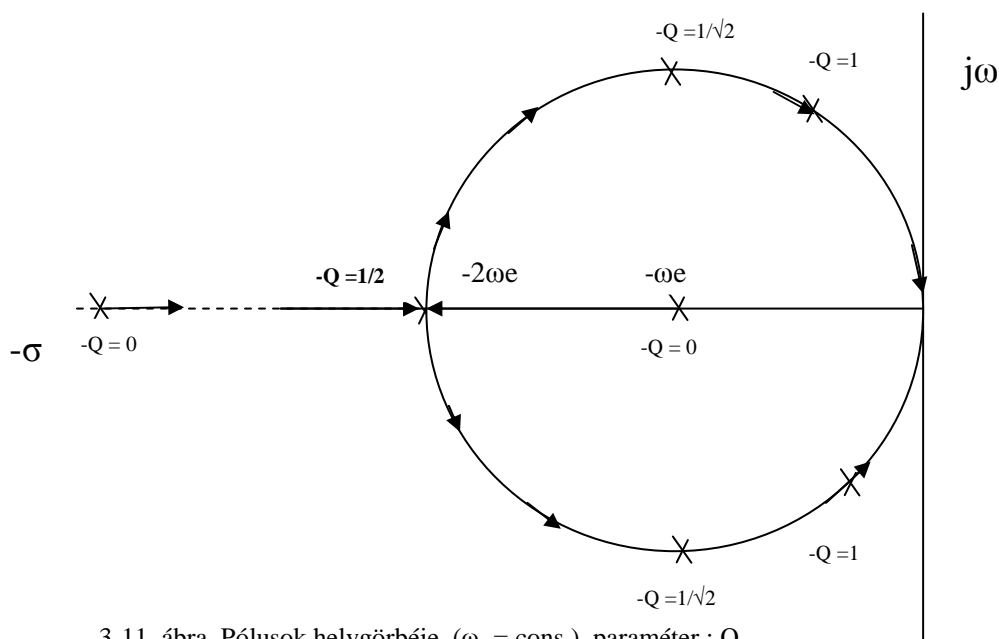


3-10. ábra. Pólusok elhelyezkedése másodfokú tag esetén $\omega_0 = \text{const.}$, paraméter: Q

A $\sigma = -\infty$ helyzet nem változhat, mert a határérték egyértelműen feloldható. Más a helyzet a $\sigma = 0$ helyzetű pólussal:

$$\lim_{Q \rightarrow 0} \bar{s}_1 = \lim_{Q \rightarrow 0} \omega_e \frac{-1/2Q + \sqrt{1/4Q^2 - 1}}{Q} = \omega_e \frac{1}{2Q^2} (-1 + (1 - 2Q^2)) = \omega_e \quad (25),$$

(mivel $\lim_{a \rightarrow 0} \sqrt{1 - 2a} = 1 - a$). Ez a pólus tehát az origótól a $\sigma = -\omega_e$ helyre helyeződik át. A 3-11. ábra mutatja a pólusok új helyzetét



3-11. ábra. Pólusok helygörbéje, ($\omega_e = \text{const.}$), paraméter: Q

3.7. A Laplace-transzformáció eredményeinek alkalmazása a frekvenciatartományban:

Bode⁵⁰-diagramok

A hálózatra jellemző átviteli paraméterek jelenleg két alapvető módon adhatók meg. Mindkét módszer harmonikus bemeneti gerjesztésen alapul.

a, Pólus-zérus elhelyezkedéssel a komplex fázissíkon, ezt még részletesebbé tudjuk tenni úgy, hogy helygörbét adunk meg, melyek a pólusok vagy zérusok elhelyezkedésének változását adják meg valamely paraméter függvényében. (Igen szemléletes módszer)

b, A hálózat átviteli karakterisztikájának $[\bar{K}(j\omega)]$ ábrázolásával egy független változó, a $j\omega$ paraméter (a bemeneti gerjesztés körfrekvenciája) függvényében.⁵¹

Ezt rendszerint két karakterisztika segítségével írjuk le, mivel $\bar{K}(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi}$, az átviteli karakterisztika abszolút értékét $[A(\omega)]$ és a φ fázistolás nagyságát külön ábrázolhatjuk. Ezeknek a karakterisztikáknak a szerkesztéséhez a pólusok és zérusok ismerete alapján a *Bode-diagram*-módszert használjuk fel.

Bode azt javasolta, hogy az átviteli karakterisztika gyöktényezőss alakját képezzük úgy, hogy abban a komplex frekvenciatartomány szerint képzett átviteli függvény gyökeit alkalmazzuk.

$$\bar{K}(j\omega) = \frac{\bar{N}(j\omega)}{\bar{M}(j\omega)} = k \frac{\prod_{i=1}^{i=n} (j\omega - s'_i)}{\prod_{i=1}^{i=m} j\omega - s''_i} \quad (26)^{52}$$

Vegyük ki azokat a tagokat, ahol a pólus, illetve a zérus értéke 0. Legyen a rendszerben „ k ” számú 0-ás zérus, és „ l ” számú 0-ás pólus:

$$\bar{K}(j\omega) = \frac{\bar{N}(j\omega)}{\bar{M}(j\omega)} = \bar{k}(j\omega)^{k-l} \frac{\prod_{i=k+1}^{i=n} (j\omega - s'_i)}{\prod_{i=l+1}^{i=m} j\omega - s''_i} \quad (27)$$

Ezek után a számláló, és a nevező tagjait alakítsuk át az alábbi módon:

⁵⁰ Bode a róla elnevezett diagramokról szóló értekezését 1945-ben publikálta.

⁵¹ Ismét emlékeztetünk arra, hogy a hálózat nem ideális átviteli függvényei — az $Ue^{j(\omega t - \varphi)}$ jelek, azaz az egyetlen frekvenciát tartalmazó harmonikus jelek kivételével — a jel alakjának torzulását okozzák. (Lineáris torzítások, 4.2. pont)

⁵² K ebben az esetben A_m/B_n , azaz a polinomokban a legnagyobb kitevőjű tagok együtthatóinak hányadosa

$$\bar{K}(j\omega) = \frac{\bar{N}(j\omega)}{\bar{M}(j\omega)} = k(j\omega)^{k-l} \frac{\prod_{i=k+1}^{i=n} (-s'_i) \prod_{i=k+1}^{i=n} (1 - j\omega/s'_i)}{\prod_{i=k+1}^{i=m} (-s''_i) \prod_{i=l+1}^{i=m} (1 - j\omega/s''_i)} \quad (28)$$

Az egyenlet szorzótényezőjében található $k \frac{\prod_{i=k+1}^{i=n} (-s'_i)}{\prod_{i=l+1}^{i=m} (-s''_i)}$ együtthatót \bar{k}_1 -nek elnevezve⁵³

$$\bar{K}(j\omega) = \frac{\bar{N}(j\omega)}{\bar{M}(j\omega)} = \bar{k}_1(j\omega)^{k-l} \frac{\prod_{i=k+1}^{i=m} (1 - j\omega/s'_i)}{\prod_{i=l+1}^{i=m} (1 - j\omega/s''_i)} \quad (29) \mathcal{NB}$$

A szorzatokban található elemi átviteli függvények a hálózat átviteli karakterisztikájának építőkövei. Ezek az elemi függvények arra is alkalmasak, hogy egy adott polinomhoz fel tudjuk építeni a hálózatot, amennyiben ez valóban lehetséges. (64. oldal; 49. hivatkozás).

Az adott átviteli függvényt, vagy átviteli karakterisztikát megvalósító hálózat megtervezését hálózatszintézisnek nevezzük.

A továbbiakban a szorzatokat két részre bontjuk: Külön kezeljük azokat az építőköveket, melyek gyökei valósak, vagy az origóban találhatóak. A konjugált komplex gyököket tartalmazó építőköveket *párosával összevonva* értelmezzük, így eliminálva az építőkövek nevezőjéből a komplex értékeket. (Ezzel megkönnyítjük a munkát)

Bode további javaslata szerint $A(\omega)$, azaz az abszolút érték számításánál, $A(\omega)$ helyett az előbbi logaritmusával arányos $a(\omega)$ értéket célszerű számítani, és az ω tengelyt is logaritmusos lépték szerint kell felvenni, azaz itt is vegyünk fel egy $v = \log \omega$ változót. (ez azt jelenti a gyakorlatban, hogy az $A(\omega)$ függvényt log-log léptékben ábrázoljuk)

A logaritmusos forma előnye elsősorban abban rejlik, hogy — mivel szorzat logaritmusa egyenlő a logaritmusok összegével — az egyes „építőkövek” által meghatározott elemi átviteli függvényeket logaritmusos formában elvileg össze lehet adni..

a egy valós transzfer értéknek, azaz az adott ω körfrekvencián mérhető átviteli érték abszolút értékének logaritmus formában megadott alakja. Mértékegysége nincs, számszerű értéke általában dB. (decibel).⁵⁴ Amennyiben a transzfer értékek teljesítményre vonatkoznak,

$$a(\omega) = 10 \lg |A(\omega)|;$$

⁵³ k_1 fizikai értelme: N_k/M_L

⁵⁴ Graham Bell (1847-1922), Skót származású mérnök, a klasszikus verzió szerint a telefon feltalálója. (2001 szeptemberében a New-York-i polgármester, Giuliani javaslatára az USA képviselőháza határozatban jelentette ki, hogy a telefon feltalálója valójában Antonio Melucci...)

ha feszültségre, vagy áramra, esetleg impedanciára, úgy

$$a(\omega) = 20 \lg |A(\omega)|; \quad (29a)$$

A $\varphi(\omega)$ függvény esetében az egyes építőkövek elemi átviteli karakterisztikáját

$$\bar{K}_i(j\omega) = A_i(\omega) e^{j\varphi_i(\omega)}$$

alakban felírva azonnal látható, hogy $\bar{K}(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$

függvény keresett $\varphi(\omega)$ értéke az egyes építőkövek $\varphi_i(\omega)$ függvényeinek összege lesz. Érdemes megvizsgálni néhány „építőkövet”, mert hamarosan (a szűrőknél) ismereteinket hasznosítani fogjuk.

a. *Valós zérus érték.* A σ valós tengelyen passzív hálózat esetén a gyökök a tengely negatív oldalán helyezkednek el, hagyományos jelölésük $-\omega_3$.

Az építőkocka átviteli karakterisztikája: $\bar{K}_i(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{\omega_3}$, egy valós és egy képzetes tag

összege. Abszolút értéke $A_i(\omega) = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_3}\right)^2}$

Áttérve az $a_i(\omega) = 20 \lg A_i(\omega)$ összefüggésre, két durva közelítést alkalmazunk. Első esetben azokat az „ ω ” értékeket vizsgáljuk, melyekre nézve $\omega \ll \omega_3$.

Ebben az esetben a_i értéke $\lg 1 = 0$ lesz. Ez az egyenes egybeesik az ω tengellyel.

Második közelítésünk az ellenkező véglet, azaz $\omega \gg \omega_3$.

Ebben az esetben $a_i = 20 \lg \omega/\omega_3$. Ez egy egyenes egyenlete, amely $\omega = \omega_3$ ponton metszi az ω tengelyt, és 6 dB/oktáv^{56} iránytangens értékkel emelkedik felfelé.

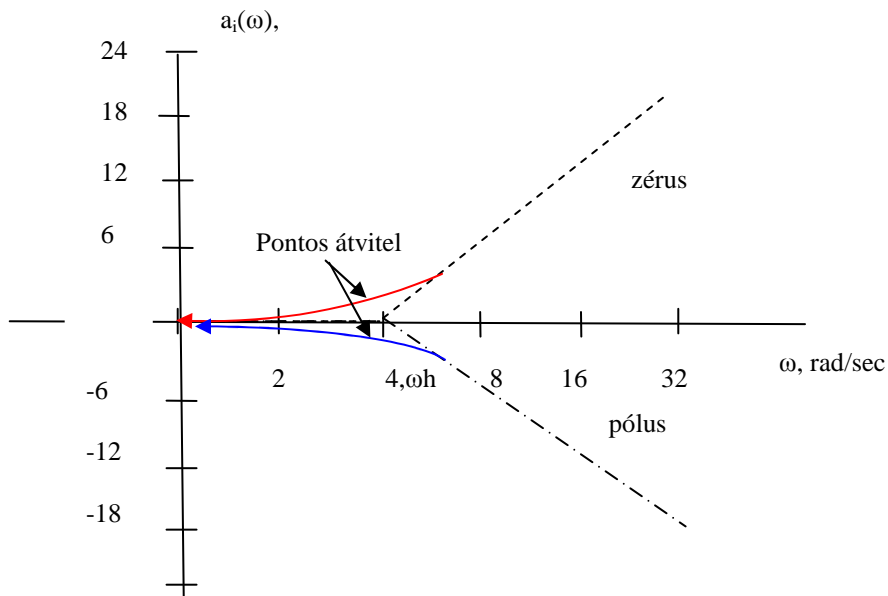
Pólus esetén az egyenes természetesen az ω tengelyhez képest ereszkedni fog. (3-12. ábra)

Érdemes kiszámítani a $a_i(\omega_h)$ pontos értékét is: zérus esetén $\sqrt{2}$, ami $+3 \text{ dB-nek}^{57}$ felel meg.

⁵⁵ Mértékegység nélküli értékek nagyságát—elsősorban a vezetékes híradástechnikában—szokás még Neperben (Np) mérni. Ebben az esetben $A = \ln [k(\omega)]$. Egyszerűbb megjegyezni, hogy feszültségek, stb. esetén $1 \text{ Np} = 8,68588 \text{ dB}$.

⁵⁶ Az „oktáv” szó a zenéből ered. Valamely „egész”, azaz nem felemelt, vagy leszállított hang (a,h,c,d,e,f,g,,h) és az annak megfelelő, de kétszeres frekvenciájú hang között hét egész hang van, azaz a nyolcadik hang a dupla frekvencia. „oktáv” – tehát a frekvencia, a mi esetünkben a körfrekvencia kétszereződését jelenti. A „6dB/oktáv” természetesen megegyezik a „20dB/dekád iránytangens-értékkel.

⁵⁷ Innen ered ennek a körfrekvenciának az ω_3 jelölése.



3-12. ábra. Valós tengelyen elhelyezkedő zérus és pólus Bode-diagrammja

A valós zérus fázisgörbéjének egyenlete:

$$\varphi_i(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \bar{K}_i(j\omega)}{\operatorname{Re} \bar{K}_i(j\omega)} = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\omega_h} \quad (30)$$

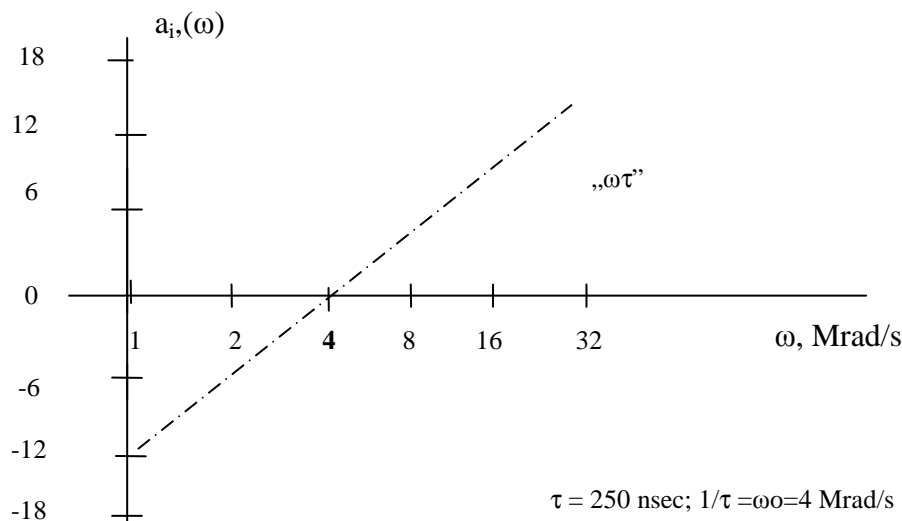
„ ω ”=0 esetben „ φ ” értéke 0. $\omega = \omega_h/\sqrt{3}$ esetben φ értéke $\pi/6$ (30 fok), $\omega = \omega_h$ érték mellett φ értéke $\pi/4$, $\omega = \sqrt{3} \omega_h$ értéknél a szög értéke $\pi/3$, $\omega = \infty$ értéknél φ értéke $\pi/2$.

b. Konstans szorzó.

Konstans „ k ” szorzó Bode-diagramja természetesen vízszintes egyenes, 20 lgk. A szög értéke természetesen 0.

c. Origóban található zérus.

Látszólag könnyű dolgunk van: A $K_i(j\omega)$ építőköcka tisztán képzetes, minden esetben $j\omega/\omega_0$ alakú. (Ha valamilyen $\omega\tau$ értéket látunk, akkor $\omega_0 = 1/\tau$), $a(\omega)$ értéke tehát $20 \lg \omega - 20 \lg \omega_0$. A fázis értéke $\pi/2$. A Bode-diagram meredeksége 6dB/oktáv, és a $\log \omega$ tengelyt $\omega=\omega_0$ értéknél metszi. (3-13. ábra)



3-13. ábra.
origóban elhelyezkedő zérus Bode-diagramja

d, Konjugált komplex pár (póluspár)

Mint már említettük, itt a párokat össze kell vonnunk. Legyen az egyik zérus értéke (lehet pólus is, az eredmény ugyanaz) $\sigma_i + j\omega_i$, a másiké természetesen $\sigma_i - j\omega_i$. (Az „i” után „i+2” következik, mivel az „i”-re két gyököt használtunk el)

$$\bar{K}_i(j\omega) = 1 / \left[\left(1 - \frac{j\omega}{\sigma_i + j\omega_i}\right) \left(1 - \frac{j\omega}{\sigma_i - j\omega_i}\right) \right] = 1 / \left[1 - \frac{2j\omega}{\sigma_i^2 + \omega_i^2} - \frac{\omega^2}{\sigma_i^2 + \omega_i^2} \right] \quad (31)$$

A (16) egyenlet (63. oldal) szerint $\sigma_i^2 + \omega_i^2 = \omega_{0i}^2$, a (20a) egyenlet alapján pedig $\sigma_i = -\omega_{0i}/2Q$ (ω_{0i} alatt az adott „i” másodfokú tag törésponti körfrekvenciáját értjük) Fentiek alapján:

$$\bar{K}_i(j\omega) = 1 / \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0i}^2} + \frac{j\omega}{\omega_{0i}Q} \right] \quad (32^{58})$$

A (32) egyenlet igen fontos, természetesen közvetlenül is nyerhető egy másodfokú tag áramköri számításaiból, pl. 19a egyenletből, ha elvégezzük az $s = j\omega$ helyettesítést..

Próbáljuk közelíteni a másodfokú alaptag Bode-diagramját:

$$A_i(\omega) = 1 / \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0i}^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_{0i}^2 Q^2} \right]^{1/2} \quad (33)$$

$$a_i(\omega) = -10 \lg \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0i}^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_{0i}^2 Q^2} \right] \quad (34)$$

Ezt a diagramot szemmel láthatóan három ω értéknél mindenképpen érdemes megvizsgálni:

⁵⁸ Konjugált komplex zéruspár esetén az egyenlet a (32) egyenlet az alábbiak szerint módosul::

$$\bar{K}_i(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0i}^2} + j \frac{\omega}{\omega_{0i}Q} \quad (32a)$$

- a, $\omega \ll 1$,
- b, $\omega \gg \omega_0$,
- c, $\omega = \omega_0$ helyeken.

Ezen kívül azonban valamilyen $Q > Q_{\text{hat}}$ esetben $A_i(\omega)$ -nak maximuma van ω_{max} érték mellett.

Ez újabb kérdéseket vet fel:

- d, mekkora ω_{max} értéke,
- e, mekkora Q_{hat} értéke,
- f, mekkora A_i , $a_i(\omega_{\text{max}})$, esetleg $\bar{K}_i(\omega_{\text{max}})$ értéke,
- g, mekkora az az $\omega^* \neq 0$ érték, ahol $a_i(\omega)$ értéke 0 dB.

a, $\omega \ll \omega_{oi}$ esetben elhanyagolhatók az összes törtek, melyek ω -t tartalmaznak az „1” constans mellett, így a várt eredményt kapjuk:

$$a_i = 0$$

b, $\omega \gg \omega_{oi}$ eset kiszámításánál „1” hanyagolható el az $-\frac{\omega^2}{\omega_{oi}^2}$ taghoz képest, valamint

elhanyagolható az $\frac{\omega^2}{\omega_{oi}^2 Q^2}$ tag is, mivel az előbbi tagot négyzetre emelve $\frac{\omega^4}{\omega_{oi}^4}$

eredményt kapunk. Így a_i értéke ebben az ω tartományban:

$$a_i(\omega) = -10 \lg \frac{\omega^4}{\omega_{oi}^4} = 40 \lg \omega_{oi} - 40 \lg \omega \quad (35)$$

Vizsgáljuk meg, mekkora a különbség ebben a tartományban valamilyen ω_q és $2\omega_q$, azaz az előbbi körfrekvencia kétszeres értékén mérhető a_i átvitel között.:⁵⁹

$$a(\omega_q) - a(2\omega_q) = 40 \lg 2\omega_q - 40 \lg \omega_q = 40 \lg 2 = 12 \text{ dB}$$

(iránytangens: -12 dB/oktáv)

Fenti két pont törtvonalas közelítést eredményez, ω_0 pontban törésponttal.

c, A törtvonalas ábrázolás hibájának meghatározásához meg kell határozni az A_{oi} pontos értékét $\omega = \omega_0$ értéknél. A (34) egyenlet alapján ez az érték

$$a(\omega = \omega_0) = 20 \lg Q. \quad (36)$$

Ez az érték $Q = 1/2$ esetén -6 dB, $Q = 1/\sqrt{2}$ esetben -3 dB, $Q = 1$ esetben 0 dB.

d, ω_{max} értékének meghatározásához elvileg a (33) egyenletet kell deriválnunk ω szerint, majd az így kapott polinom gyökeit kell megkeresnünk. Gyakorlatban elegendő a

⁵⁹ Ezt a távolságot a csemballo feltalálása óta nevezik oktávnak (8 hangjegy).

$A(\omega)]^2 = (1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0i}^2})^2 + \frac{\omega^2}{\omega_{0i}^2 Q^2}$ polinom deriválása. Eredményként a

$$\boxed{\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \quad (37) \text{ NB}$$

igen fontos összefüggést kapjuk, amiből az is következik, hogy

e, $\boxed{Q_{\text{hat}} = 1/\sqrt{2}}$ (38), NB

f, $A(\omega_{\max})$ értéke

$$\boxed{A(\omega_{\max}) = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}} \quad (39) \text{ NB}$$

$Q = 1$ esetén ω_{\min} értéke $0,7 \omega_0$, $A(\omega_{\min})$, értéke pedig $\sqrt{3}/2$, kb. 0,8666. Ennek megfelelően $a(\omega_{\min})$ értéke kb. $-1,5$ dB.

g, Végül lényeges az az „ ω_i^* ” érték, aminél $Q > Q_{\text{hat}}$ ($1/\sqrt{2}$) esetben a_i értéke 0 dB.

$$\omega_i^* = \omega_{0i} \sqrt{2 - 1/Q^2} \quad (40) \text{ NB}$$

Ez az ω^* érték $q=1$ esetben ω_0 , $Q = \infty$ esetben (tisztán képzetes gyökök) pedig $\sqrt{2}\omega_0$.

$\Phi(\omega_i)$ kiszámítása során a

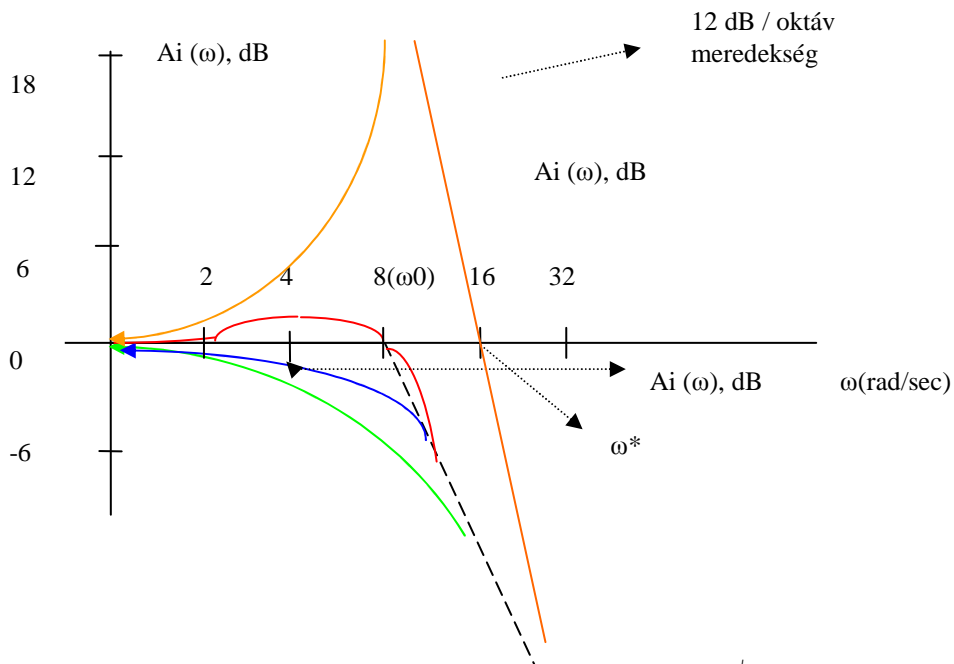
$$\bar{K}_i(j\omega) = 1 / [1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0i}^2} + \frac{j\omega}{\omega_{0i}Q}] \quad (41)$$

egyenlet szerint

$$\varphi(\omega_i) = \text{arctg} - \frac{\frac{\omega}{\omega_{0i}Q}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_{0i}})^2} \quad (42)$$

⁶⁰ Felüláteresztő alaptag esetén pólus helyett zérusról beszélünk, s az egyenletben a „max” jelölés helyett „min” jelölést kell használnunk.

⁶¹ Zérus esetén max. átvitel helyett min. átvitelről beszélünk, s az egyenlet jobboldala a reciprok értékére módosul



3-14. ábra. Másodfokú tag $A_i(\omega)$ átvitele $Q=1/2$, $Q=1/\sqrt{2}$ (kék) $Q=1$ (vörös) és $Q=\infty$ (narancs) értékek esetén

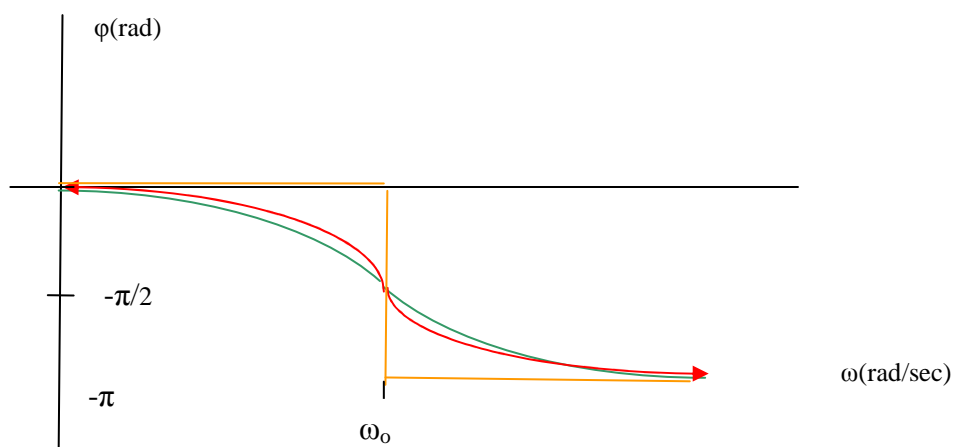
Fenti egyenletet elemezve látjuk, hogy $\tan \varphi$ értéke

0-hoz közeli ω értékek mellett 0, (pontosabban ω/ω_{0i}), mivel kis φ érték mellett $\varphi = \tan \varphi$;

$\omega = \omega_{0i}$ érték mellett a függvénynek szakadása van: az ω_{0i} értéket alulról közelítve $\tan \varphi$ értéke --- ∞ , míg a felülről történő közelítés $+\infty$ $\tan \varphi$ értéket ad.—ez megfelel $\varphi = -\pi/2$ értéknek.

$\omega \gg \omega_{0i}$ értékek esetén a $\tan \varphi$ értéke a pozitív tartományban a 0-hoz közelít —ez $\varphi = -\pi$ értékre utal.

A $\varphi(\omega)$ görbe lefutása nagy mértékben függ a tag körjóságától. Nagy Q értékek mellett a görbe egyre inkább hasonlít egy $\varphi = -\pi[1(\omega_0)]$ ugrásfüggvényhez. Kisebb Q értékek esetén a függvény nyúltabbá válik. A karakterisztikának inflexiós pontja van az $\omega = \omega_0$ körfrekvencia mellett. (3-15. ábra)



3-15. ábra. Másodfokú tag $\varphi(\omega)$ átvitele $Q=1/2$, (zöld), $Q=1$ (vörös) és $Q=\infty$ (narancs) értékei esetén

Ellenőrző kérdések:

1. Mit nevezünk valamely lineáris hálózat transzfer függvényének?
2. Mi a Fourier sor, a Fourier transzformáció és a Fourier-integrál?
3. Mi okozza a lineáris torzításokat?
- 3.. Mi a különbség a futási idő és a csoportfutási idő között?
4. Hogyan juthatunk el a Fourier-transzformációtól a Laplace-transzformációhoz?
5. Hol helyezkedhetnek el egy másodfokú alul- vagy felüláteresztő tag zérusai és pólusai?
6. Miben különbözik egy első-és egy másodfokú aluláteresztő tag Bode-diagramja?
7. Mi annak a kritériuma, hogy egy másodfokú aluláteresztő tag $A_i(\omega)$ átvitele monoton legyen?⁶²
8. Milyen esetben helyezkednek el valamely másodfokú tag pólusai vagy zérusai a $j\omega$ tengelyen?
9. Mi a jellemző az origóban elhelyezkedő zérus Bode-diagramjára?
10. Milyen eredő Bode-diagramot ad egy origóban elhelyezkedő zérus, és egy , az σ tengely valamely $-\sigma_0$ pontján elhelyezkedő pólus?
11. Mely pontokon térnek el legjobban a Bode-diagramok a tényleges karakterisztika-értékektől?

⁶² Az $y = f(x)$ függvényt abban az esetben nevezzük monoton csökkenőnek, ha a $\frac{\partial y}{\partial x} \leq 0$ egyenlőtlenség az értelmezési tartományban valamennyi x értékre teljesül.

IV. fejezet

Aktív hálózatok (erősítők)

Aszimmetrikus bemenetű erősítők

4.1. Alapismeretek, meghatározások

A reális erősítő elemekből felépített hálózatok a 2. fejezet 2.2 pontjában definiált idealizált aktív elemek és idealizált passzív hálózati elemek segítségével modellezhetők. Előbbiek négyfólusok, vagy hat-ill. nyolcfólusok lehetnek. A négyfólusok be- és kimenete aszimmetrikus felépítésű (az egyik pont a referenciapont), és jól modellezhetők vezérelt generátorokkal. Az aszimmetrikus bemenetű (a továbbiakban: aszimmetrikus) erősítőt, mint négyfólust a be- és kimeneti feszültség, ill. a be- és kimeneti áram jellemzi. A négyfólusok egyenletének megadásánál mindig *harmonikus (szinuszos)* gerjesztést tételezünk fel (a frekvencia értéke természetesen 0 is lehet, az operátor lehet $j\omega$, vagy s).

A másik lényeges feltételezés, hogy az erősítő lineáris működésű. Ez természetesen aktív elemre vonatkoztatva már nagyon merész, de igen kis amplitúdójú bemeneti jelet feltételezve megengedhető. *Ebből az is következik, hogy a négyfólus-paraméterek munkapont-függők.*

Az erősítőket lineáris elemnek ítélve működésüket a négyfólus- (kétkapu) egyenletekkel, más szavakkal a kétkapu-mátrix-szal modellezhetjük.

A négyfólus-egyenletek a négy jellemző (bemeneti-kimeneti feszültség, bemeneti-kimeneti áram) egymáshoz rendelését mutatják.

A négy változó érték közül elvileg tetszőlegesen kiválaszthatunk kettőt (pl. kimeneti áram és kimeneti feszültség), és azokat, mint függő változókat felírhatjuk a másik két érték egy jellemző konstanssal képzett szorzatának összege gyanánt.⁶³ A függő változók (a paraméterrendszer) kiválasztásánál célszerű a négyfólus fizikai megvalósításából kiindulni.

A terheléshez képest kis kimenő impedanciájú erősítők (Thevenin-helyettesítés) esetén az un. „inverz hibrid” (D) paraméterezés tűnik a legkényelmesebbnek

$$\begin{aligned} I_1(s) &= D_{11}(s)U_1(s) + D_{22}(s)I_2(s) \\ U_2(s) &= D_{21}(s)U_1(s) + D_{22}(s)I_2(s) \end{aligned} \quad (1) \quad \mathcal{NB}$$

$I_2 = 0$ értéket feltételezve (üresjáratú üzem) a $D_{11}(s)$ koefficiens a bemenő impedancia reciprokának, a $D_{21}(s)$ pedig az üresjáratú feszültségerősítésnek felel meg:

⁶³ Valójában a függő változó független változók szerint képzett teljes differenciálját helyettesítjük szorzással és összeadással.

$$D_{11}(s) = I_1(s)/U_1(s) \Big|_{I_2=0}$$

$$D_{21}(s) = U_2(s)/U_1(s) \Big|_{I_2=0}$$

$U_2 = 0$ értéket feltételezve (kimeneti rövidzár) a $-D_{22}(s)^{64}$ együttható a kimenő impedancia értékét adja. ($Z_{ki} = U_{2ü}/I_{2rz}$)

Fentiek alapján a 4-1. ábra szerinti modellezés valósítható meg.

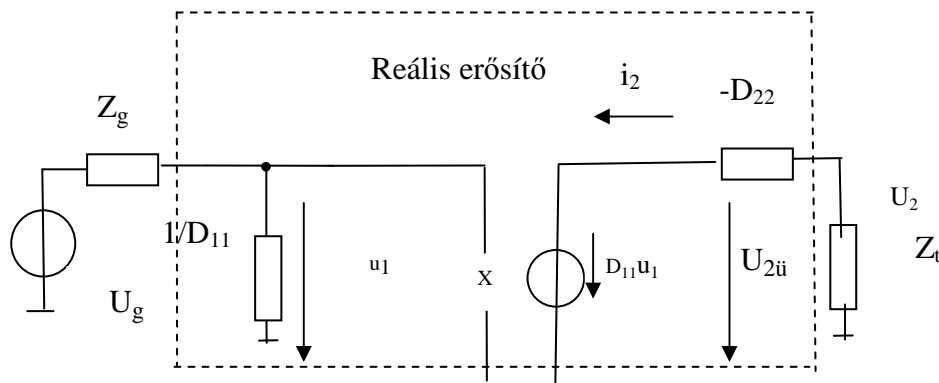
Az erősítők egy részénél, elsősorban a közös emitterű és közös bázisú kimeneti fokozattal rendelkező erősítők esetében, ahol a kimeneti fokozat áramgenerátoros helyettesítő képe áll közelebb a valósághoz, nem „D”, hanem „Y”, un. „admittancia- paraméterek” használata célszerű:

$$I_1(s) = Y_{11}(s)U_1(s) + Y_{12}(s)U_2(s)$$

$$I_2(s) = Y_{21}(s)U_1(s) + Y_{22}(s)U_2(s)$$

(2) NB

Ebben az esetben az erősítőt U-I ideális generátorral, (transzkonduktancia= $-Y_{21}$) Y_{11} bemenő impedanciával, Y_{22} párhuzamos kimenő impedanciával, (Norton), lehet modellezni.



4-1. ábra. Erősítő helyettesítő képe vezérelt feszültséggenerátorral és passzív hálózattal

Mivel 4 változóból két változót hatféle módon választhatunk ki, így a már említett S és Y paraméteres mátrixon kívül még négy különböző négy-pólus-paraméter-rendszer alakítható ki. Így az „Y” mátrixhoz hasonló „Z” mátrix rendszer, (transzformátoregyenletek), a több erősítő-fokozat kaszkád- (egymás-utáni) kapcsolásánál hasznos „A” (kaszkád, függő változók: U_1, I_1), és „B” (inverz kaszkád, függő változók U_2, I_2) paraméterrendszer. Gyakran használjuk az

⁶⁴ A „-” előjel a négy-pólus kimenő áramirányának felvételéből adódik. Mivel $U_2 = -I_2 Z_t$, D_{22} önmagában negatív értéket vesz fel, ezt a rajzon a „-” jel visszafordítja.

inverz hibrid rendszer párját, a „h” hibrid mátrixot (függő változók: U_1, I_2), amelyből tranzistoros CE fokozat esetén a h_{21} paramétert „ β ” néven szinte mindenki ismeri..

4.2. Az erősítők legfontosabb paraméterei

Az 5.1. pontban az erősítő lineáris modelljének négyfólus-paramétereivel ismerkedtünk meg. A paraméterek fizikai megfelelői a bemenő- és kimenő impedancia, az üresjáratú erősítés, a rövidzár transzkonduktancia, a rövidzár-áramerősítés, valamint a visszahatások, különböző rendszerekben.

Az egyes paraméterek valamennyien az (s) változó, a komplex körfrekvencia függvényei. Áttérve a képzetes $j\omega$ változóra, érdemes áttekinteni az egyes tranzistoros alkapcsolások esetén a különböző paraméterek nagyságrendjét, és azok frekvenciafüggését.. (1. táblázat)

A táblázat alapjaiban az Y paramétereknek megfelelő fizikai mennyiségeket tartalmazza. A D_{21} paraméter azt szemlélteti, hogy a transzkonduktancia segítségével hogyan juthatunk el az üresjáratú feszültségerősítéshez. Lényeges az egyes paraméterek függése a $j\omega$ képzetes körfrekvenciától. Amennyiben az átviteli karakterisztikában több töréspont, azaz több időállandó is szerepel, úgy az *erősítő fokozat sávszélességét általában a nagyobb időállandójú tag határozza meg*, a kisebb időállandójú tag értéke a stabilitási problémákkal függ össze. (Visszacsatolt erősítőknél módosul a helyzet. Részletesen: 5.7. pont: Visszacsatolás).

Érdemes bevezetni már most az erősítő fokozatok jósági tényezőjét, ami a fokozat *feszültségerősítésének és a sávszélességnek a szorzata*. Az *erősítés mérésénél a kimenetet a saját bemenő impedanciával terheljük*. Mind CE, mind CB kivitelű alkapcsolás választása esetén a jósági tényező elvileg a fokozat konkrét elemeitől függ, de max. értéke mindkét *alkapcsolás esetén ugyanannyi: f_α^{65}* Ez az érték típusfüggő, és nagyon közel van a tranzisztor un. „tranzitfrekvenciájához.” (Ez az f_T -vel jelölt frekvencia az a max. frekvenciaérték, amelynél az adott tranzisztortípussal felépített erősítővel max. „1” teljesítményerősítés érhető el.).⁶⁶

Nagyon leegyszerűsítve: A fokozat jósági tényezőjének max. elérhető értékét a tranzisztor paraméterei határozzák meg, és független a választott alkapcsolás jellegétől. Ha tranzisztort vásárolunk, az adott összegért jósági tényezőt vásároltunk. Ez az állítás a későbbiekben kiterjeszhető lesz.

⁶⁵ CC fokozat kivételével. MOS tranzisztoroknál is némileg más a helyzet.

⁶⁶ Ez a kritérium megfogalmazható olyan formában is, miszerint ezen a frekvencián a tranzisztor $|\beta|$ értéke '1'-gyel egyenlő. Az általunk megfogalmazott meghatározás az erősítők tranzitfrekvenciájának definíciójából indul ki: „Valamely erősítő tranzitfrekvenciája az a frekvencia, melynél az erősítő teljesítményerősítése egységnyi.”

4.3. Erősítő alapkapsolások nagyjelű viselkedése

A tranzisztorok természetesen nemlineáris elemek. Az átviteli paramétereknek passzív hálózatoknál megszokott négyfólyus-jellegű leírása csak végtelen kis gerjesztésekre igaz, és a paraméterek értéke is munkapont-függő.

Reális nagyságú bemeneti jel esetén a kimeneti jel alakja eltér a bemeneti jel alakjától. Az eltérés mértékét és jellegét a választott alapkapsolás, (FE,FB,FC)⁶⁷, s a tranzisztor munkapontja,

a kimeneti-és bemeneti jel nagysága, a választott tranzisztor alaptermológiája (bipoláris, MOS-FET), ezen belül az egyes tranzisztorok fajtája (nagyfeszültségű, kisfeszültségű, nagyteljesítményű, stb.), ill. az adott tranzisztor típusa (pl. BC238B) határozza meg.

4-1. Táblázat. Négyfólyus paraméterek fizikai kifejtése különböző alapkapsolásoknál

Paraméter	FE [„földelt” (közös) emitter]	FB [„földelt” (közös) bázis]	FC [„földelt” (közös) kollektor]
$D_{21}(j\omega)$, (üresjárású feszültség- sége erősítés)	$\frac{\alpha(r_{CE} \times R_C)}{r_e(1+j\omega\tau_d)(1+j\omega\tau_{CE})}$ Egyenáramon százszáz nagyságrendű lehet ⁶⁸	$\frac{\alpha(r_c \times R_C)}{r_e(1+j\omega\tau_\alpha)(1+j\omega\tau_c)}$ (Egyenáramon száz körül lehet) ⁶⁹	$\frac{Z_E}{r_e(1/j\omega\tau_\alpha) + Z_E}$ (egyenáramon is valamivel kisebb, mint 1)
$1/Y_{11}(j\omega)$ (Bemenő impedancia)	$r_e \left(1 + \frac{\beta}{1+j\omega\tau_\alpha(1+\beta)}\right)$ (Egyenáramon néhány száz ohm - néhány K Ω)	$\frac{r_e}{1+j\omega\tau_\alpha}$ (Egyenáramon néhány, vagy néhányszor tíz Ω)	$\left(1 + \frac{\beta}{1+j\omega\tau_\alpha(1+\beta)}\right)(r_e + Z_E)$ Egyenáramon tíz-száz K Ω nagyságrendű)
$1/Y_{22}(j\omega)$ (kimenő impedancia)	$\frac{r_{CE}}{1+j\omega\tau_{CE}}$ (Egyenáramon több tíz K Ω)	$\frac{r_c}{1+j\omega\tau_c}$ (Egyenáramon száz K Ω felett is lehet)	$\frac{1}{1+j\omega\tau_\alpha/r_e + 1/Z_E}$ $Z_g=0$ érték mellett (Egyenáramon néhány, vagy néhányszor tíz Ω)
$Y_{21}(j\omega)$ (transzkonduktancia „meredekség”)	$\frac{\alpha}{r_e(1+j\omega\tau_d)(1+j\omega\tau_\alpha)}$ Egyenáramon 100 mS körüli	$\frac{\alpha}{r_e(1+j\omega\tau_\alpha)}$ Egyenáramon 100 mS körüli	$\frac{1}{r_e(1+j\omega\tau_\alpha) + Z_E}$ R_E függvénye, DC-n mS alatti érték
$Y_{12}(j\omega)$ (vissz-transzkonduktancia)	C_{bc} , néhány pF, típusfüggő (RF tranzisztoroknál akár 0,2 pF is lehet)	C_c , pF nagyságrendű, (RF tranzisztoroknál 0,1-0,2 pF), de hatása a kis bemenő impedancia miatt csekély	C_{b-e} , pF nagyságrendű, hatása elhanyagolható, ha a tranzisztor kollektorát kondenzátoron keresztül földeljük.

⁶⁷ Elterjedt a CE,CB, CC jelölés is. (Common...)

⁶⁸ $\tau_d \approx r_{bb} \cdot C_e$, $\tau_\alpha \approx r_e \cdot C_e$

⁶⁹ $\tau_{CE} = (r_c \times R_C) C_{CB}$

A bipoláris tranzisztorok $I_c = f(U_{b-e})$ transzfer függvénye exponenciális jellegű, a MOS tranzisztorok hasonló $I_d = f(U_{GS})$ függvénye hatványfüggvény (első közelítésben négyzetes).

4.3.1. Nemlineáris torzítások, bevezetés

Passzív hálózatoknál a hálózatok okozta torzítások amplitúdó- és fázistorzítások lehetnek. Ezekről az ún. lineáris torzításokról alapjaiban a következők mondhatók el:

Amennyiben a bemeneti jel harmonikus, (spektruma csak egy frekvenciát tartalmaz), úgy a *kimeneti jel alakja megegyezik a bemeneti jel alakjával.*

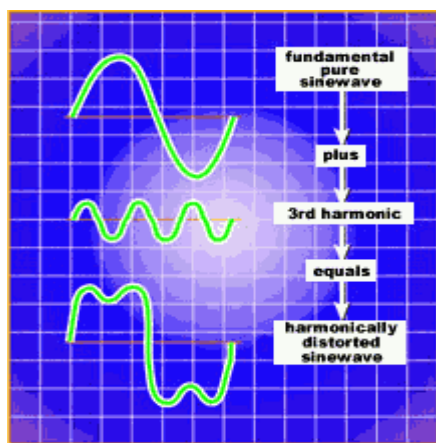
Ha a bemeneti jel spektrumában több harmonikus komponens is kimutatható, úgy a kimeneti jel spektrumán belül az egyes komponensek amplitúdó- és fázisviszonyai eltérnek a bemeneti jel megfelelő komponenséhez képest (ti. ez a lineáris torzítás definíciója), *de a kimeneti jel spektrumában nem jelenik meg olyan komponens, amelyet a bemeneti jel nem tartalmazott..*

Az erősítők azonban nemlineáris elemek, a fenti négypólus-modell csak azzal a kikötéssel érvényes, hogy a be- és kimeneti jel amplitúdója igen csekély. Ha a jelek nagysága túllépi ezt a határt, a kimeneti jelben azonnal megjelennek az erősítő nemlineáris tulajdonságának a következményei, amit összefoglalóan nemlineáris torzításoknak nevezünk.

A nemlineáris torzítások egyik hatását **a nemlinearitási termékek megjelenésével** foglalkozhatunk össze. Ha az erősítőt harmonikus jellel vezéreljük, a nemlineáris torzítás harmonikus torzításként, ha a bemeneti jel spektruma több harmonikust is tartalmaz, úgy a nemlinearitás általában modulációs torzítást okoz.

Nemlineáris torzítás még a *differenciális torzítás*.

Végül a nemlinearitás következménye lehet még a fokozat kimenetén mérhető jel felfutási meredekségének *véges* értéke is, ami a bemeneti jel meredekségétől és az erősítéstől is független.



4-2. ábra. A felharmonikusok okozta torzítás
(Feliratok: alapharmonikus – harmadik harmonikus
– torzított jelalak)

4.3.2. A torzítási tényező (THD), a klirrfaktor (k)

Az erősítő kimeneti jelében meglévő nemlineáris torzítások értékelésére legegyszerűbben a *THD* (*total harmonic distortion*) és a *klirrfaktor*, (*torzítási tényező*) alkalmas.

Mindkét tényező mérésének alapjául a bemenetet elvileg tisztán harmonikus jellel vezéreljük, és a kimeneten megjelenő nemlinearitási termékek effektív értékeinek a kimeneti jel alap-harmonikusának effektív értékéhez (THD), illetve a teljes kimeneti jel effektív értékéhez (Klirrfaktor, „k”) viszonyított értékei adják a keresett tényezőket.

Fentiek alapján:

$$THD = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}}{U_1} \quad (3)$$

$$k = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}} \quad (4)$$

Fenti értékeket szokás százalékban, de dB értékben is megadni.⁷⁰

A klirrfaktor elterjedtebb fogalom, mivel „k” értéke a 100 %-ot elvileg sem haladhatja meg, a mérőeszközeink (pl. a laboratóriumban található is) általában a klirrfaktor mérésére szolgálnak.

A két érték között az alábbiak szerint függ össze:

$$THD = \frac{k}{\sqrt{1 - k^2}}, \text{ valamint} \quad k = \frac{THD}{\sqrt{1 + (THD)^2}} \quad (5)$$

Vegyük észre, hogy sem a THD, sem a klirrfaktor valójában nem ad választ arra az egyszerű kérdésre, hogy a torzítást *milyen* felharmonikusok okozzák. Audio-rendszereknél egyáltalán nem mindegy, hogy egy négyzetes jellegű átviteli görbe eredményeként a kimeneten csak a második felharmonikus jelenik meg, (ez egy oktávot jelent, és nem disszonáns), vagy esetleg az ötödik harmonikus uralja a kimenetet, (ami fülsértő jelleget ad a hangnak).

A THD érték természetesen függ a kimeneti jel nagyságától, de itt már a relatív érték a lényeges: 1 W kimenőszint 3 W max. kimenő-teljesítményű erősítőnél már nagy kivezérlésnek számít, 50 W kimenő teljesítményű rendszer esetén viszont a kivezérlés aránylag kismértékű. Végül lényeges, hogy milyen alaphangfrekvencia mellett folyik a mérés: Az erősítő határfrek-

⁷⁰ Bizonyos cégek (Bruel&Kjaer, Rohde&Schwartz) a THD érték alatt a képletünkben szereplő értékek

négyzetét értik: $THD = \frac{U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2}$ (Mivel ez valójában a harmonikusok

teljesítményét veszi alapul, fenti képletet feloldja, ha a THD értékeket nem %-ban, hanem decibelben adjuk meg.)

venciájának közelében a frekvencia növelésével nő a felharmonikusok relatív értéke, azaz a THD faktor.

4.3.3. Intermodulációs torzítás (IMD – Intermodulation Distortion, röviden: intermod)

Az erősítők bemenetét az esetek többségében azonban nem egy adott frekvenciájú szinuszos jellel (alapharmonikus) tápláljuk, a bemeneti jel spektruma az esetek többségében több harmonikust tartalmaz. Ebben az esetben az erősítő kimenetén nemcsak az egyes bemeneti harmonikusok többszöröse jelenik meg (ez nem intermoduláció), hanem az egyes bemeneti harmonikusok frekvenciáinak természetes számmal történő szorzatösszege is.

Legyenek a bemeneti körfrekvencia értékek rendre $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, akkor a kimeneti jelben az alábbi körfrekvencia értékek lehetségesek:

$$\omega_{ki} = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_3\omega_3 + \dots + k_n\omega_n \quad (6) \text{ NB}$$

A kimeneti jelben mérhető intermodulációs komponensek alatt valamennyi olyan frekvenciájú komponens értjük, melynek frekvenciája a bemeneti jel frekvenciáiból nem egytagú polinommal képezhető.

Az egyes intermodulációs komponensek rendszámát (IM order, IM, egyes források esetében O) az adott komponens „k” együtthatói abszolút értékéből képzett összeg adja.

Fentiek megértésére az alábbi egyszerű példát mutatjuk be:

Adjunk egy erősítő bemenetére három különböző (f_1, f_2, f_3) frekvenciájú harmonikus jelet.

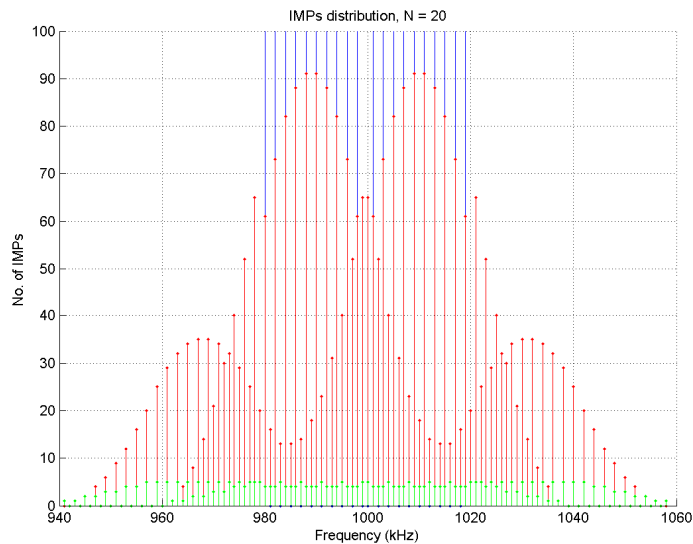
A kimeneti jelben számos olyan frekvenciakomponens található meg, ami a bemeneti jelben nem vett részt. Legyen az egyik $4f_1$ frekvenciájú,—ez *nem intermodulációs komponens* (egytagú), — a másik komponens frekvenciája legyen $f = 2f_1 + f_2 + 2f_3$. Ez utóbbi természetesen intermodulációs komponens, rendszáma 5.

Az intermodulációs hatások közül a legtöbb nehézséget a z un. *keresztmoduláció* okozza⁷¹. A keresztmoduláció létrejöttének két feltétele van:

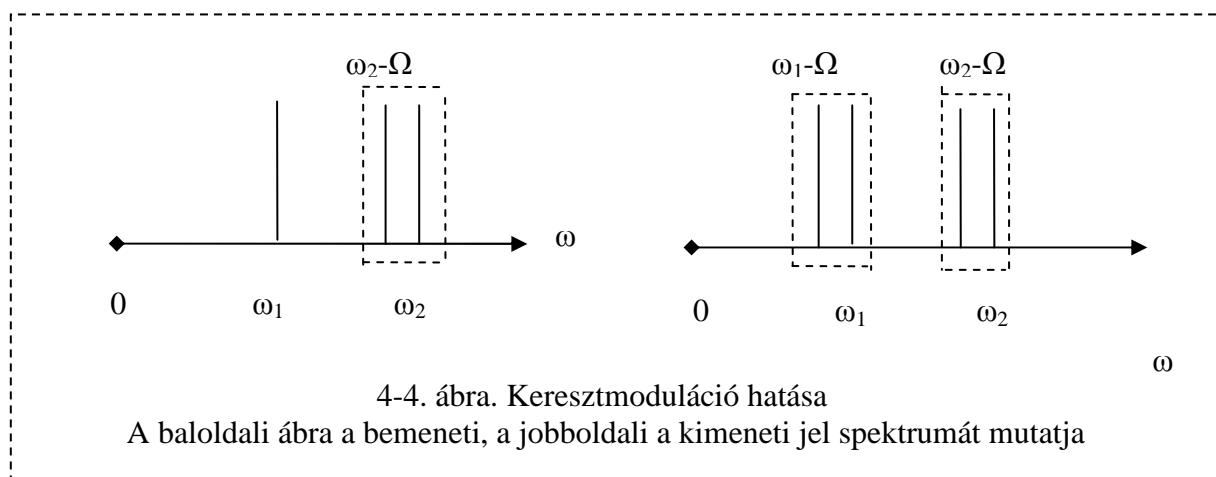
a, Az átviteli karakterisztika harmadfokú differenciálhányadosa a munkapontban nem 0. (harmadfokú komponens is tartalmaz a karakterisztika,)

b, a bemeneten legalább három különböző frekvenciájú jelnek kell jelen lennie.

⁷¹ A keresztmoduláció és az intermoduláció kommunikációs hatását bővebben a II. kötetben szeretnénk elemezni, a modulációs rendszerek tárgyalásánál.



4-3. ábra. Intermodulációs komponensek frekvenciaspektrum sugárzásakor



4-4. ábra. Keresztmoduláció hatása

A baloldali ábra a bemeneti, a jobboldali a kimeneti jel spektrumát mutatja

A 4-4. ábra mutatja, hogy ez mit jelent a gyakorlatban: Az ω_2 körfrekvenciájú jel mellett feltüntetjük az $(\omega_2 - \Omega)$ körfrekvenciájú jelet is. Egyelőre elégedjünk meg avval, hogy ez a jel az ω körfrekvenciához tartozó valamilyen információ. A kimeneten ez az információ megjelenik az ω_1 körfrekvencia mellett is, ahol pedig nincs semmi keresnivalója. Ezt az információt sajnálatos módon soha többé az ω_1 körfrekvencia mellől eltakarítani nem lehet, az információ a különböző körfrekvenciák között “keresztbe” vándorolt.. A rendszerek tervezésénél különös figyelmet kell arra fordítani, hogy ilyen helyzet semmiképpen se állhasson elő, kivéve, ha ez volt a cél (hírszerzés, kémelhárítás).

4.3.4.. Differenciális torzítások

A nemlineáris torzítások vizsgálatánál eddig két alapvető feltételezésből indultunk ki:

a, a kimeneti jel túllépi azt a határt, amin belül az erősítőt lineárisnak lehet tekinteni;

b, a nemlineáris torzításokat — hogy a lineáris torzításoktól megkülönböztessük — csak olyan alacsony frekvenciájú bemeneti jelek mellett tárgyaltuk, amelyeknél az erősítő dinamikus tulajdonságai még nem jelentkeznek, azaz az erősítő statikus átviteli görbéjének nemlinearitását figyelembe vettük ugyan, de a dinamikus tulajdonságait nem, gondolván, hogy ezt a lineáris torzításoknál vesszük figyelembe.

A differenciális torzítások esetében fenti egyszerűsítéseket már nem tehetjük meg.

Tételezzük fel, hogy az általunk bemenetinek tekintett harmonikus jel amplitudója elvileg nem lépi túl a 4.3.1. pontban említett értéket, a jel körfrekvenciája viszont már túl magas ahhoz, hogy kvázistacioner üzemet modellezzünk. Az erősítő kimeneti jele lineárisan torzított lesz, de ez önmagában természetesen nem indokolná, hogy a jelre ható torzításokat a nemlineáris torzítások között tárgyaljuk.

A jelet viszont a 4-5. ábra szerint “ráültetjük” (szuperponáljuk) egy másik jelre (egyszerűség kedvéért ez a jel lassú, de nagy amplitudójú, sőt a gyakorlatban nem is harmónikus jel, ⁷²).

Ezt az összetett jelet az erősítő kimenetén szét szeretnénk választani (pl. szűrőkkel), és külön-külön feldolgozni.

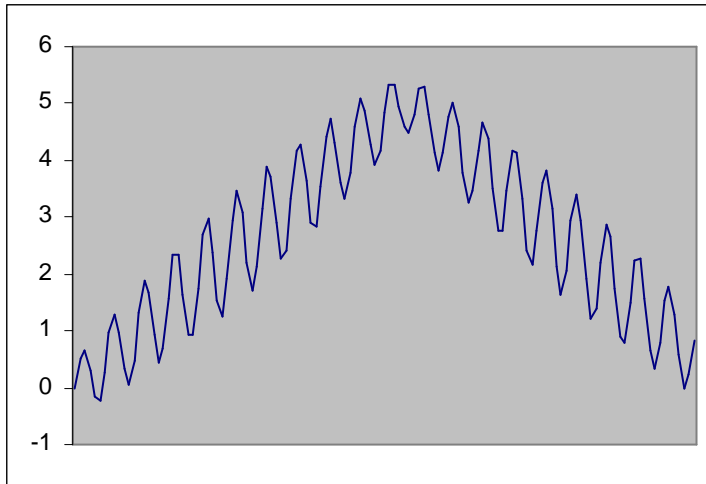
A mi jelünkre viszont a “másik” jel már ráütötte bélyegét, a jel amplitudója és fázisa a “másik” jel szintje szerint változik. (4-5. ábra alsó jel)

Az erősítők átviteli karakterisztikájának „bejárása” a nagyfrekvenciás jel számára kellemetlen fázistorzítást is okozhat, s ez sokáig (kb. 25 évig) megoldhatatlan problémát jelentett egy nagy tömegek számára használandó kommunikációs rendszer számára.⁷³

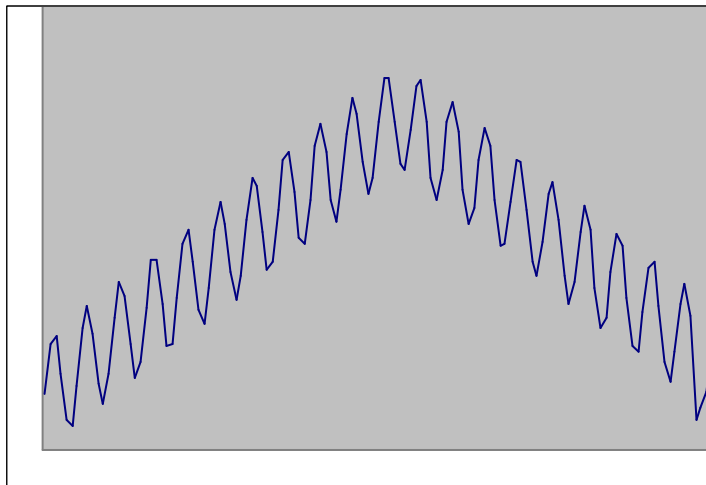
A nemlineáris torzítások az erősítő eszközök átviteli karakterisztikáinak nemlinearitásával függenek össze. Mivel ezek az aktív eszközök mind valamilyen meghatározott (vagy meghatározott tartományú) tápfeszültséget igényelnek, kézenfekvő, hogy a bemeneti-és a kimeneti jel nagysága—függetlenül a klirrfaktor értékétől— egyszerűen *nem léphet túl valamilyen meghatározott értéket, ami általában a tápfeszültség értékével függ össze. Ezt a tartományt nevezzük kivezérlési tartománynak.*

⁷² Az ilyen jelet a mérnöki gyakorlatban „háromszögjelnek” nevezzük.

⁷³ NTSC színes TV rendszer.



4-5a. ábra.
Differenciális
amplitudó-torzítás
szemléltetése.
bemeneti jel

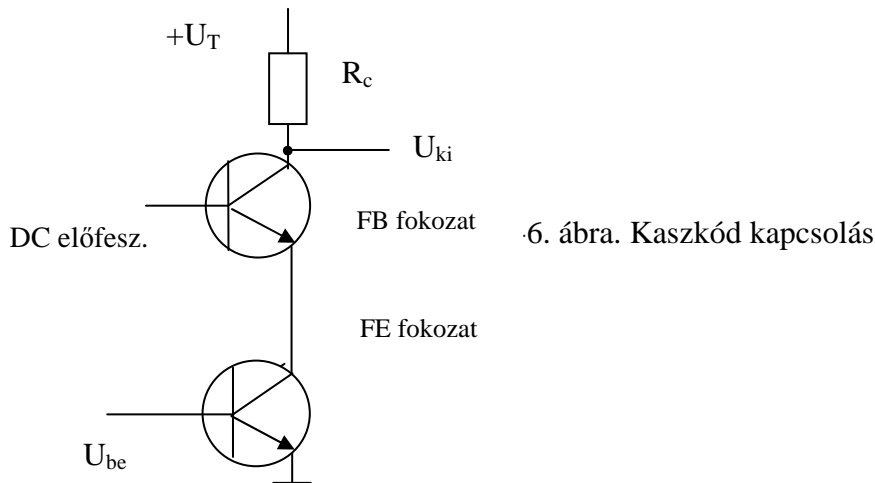


4-5b. ábra.
Differenciális
amplitudó-torzítás
szemléltetése.
kimeneti jel

4.4.. Alapkapcsolások összekapcsolása. Néhány lánckombináció

A tranzistoros alapkapcsolások elemzéséből kitűnik, hogy a közös bázisú kapcsolás visszahatása igen kicsi, de bemenő impedanciája alacsony. (Áramerősítése < 1) Ezért a CB fokozat alapalkalmazása általában ritka (igen nagy frekvenciákon viszont egyedülálló), viszont különböző más fokozatokkal együtt gyakran alkalmazzuk.

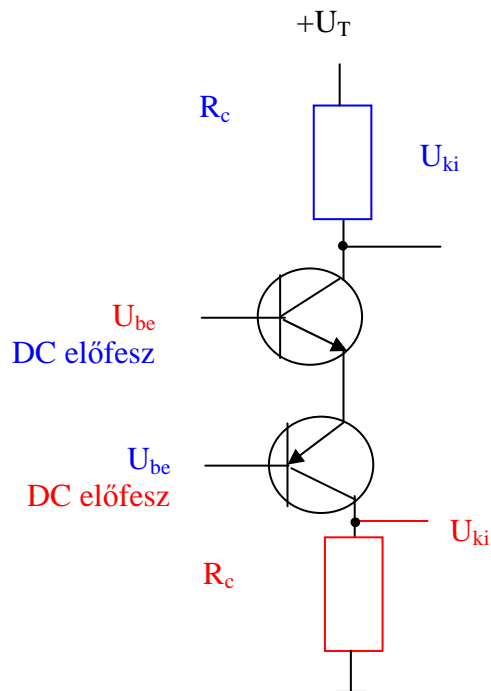
Gyakran előforduló, igen népszerű CE-CB kombináció: az ún. kaszkód kapcsolás. (4-6. ábra). Mint látható, a kombináció DC csatolással is megoldható, azonos polaritású eszközök alkalmazásával. A kapcsolás ötvözi a két fokozat előnyös tulajdonságait:



6. ábra. Kaszkód kapcsolás

A kapcsolás bemenő impedanciáját, a transzkonduktanciát a bemeneti CE fokozat határozza meg. Ez vonatkozik a sávszélességre is. A kimeneti paramétereket viszont a kimeneti fokozat határozza meg, így a kimenő impedancia R_c -vel egyenlő.

A fokozatkombináció fő értéke viszont a D_{12} visszahatás-tényező elhanyagolhatóan kis értéke. (A két fokozat D_{12} értékének a szorzata).



4-7. ábra.

Komplementer kaszkód kapcsolás

A vörös színnel jelzett elemek és jelnevek a p-n-p kimenetű kapcsoláshoz tartoznak, ebben az esetben a kék színnel jelzett elemet rövidre kell zárni.

A kék színnel jelzett elemek és jelnevek az n-p-n kimenetű kapcsoláshoz tartoznak, ebben az esetben a vörös színnel jelzett elemet rövidre kell zárni.

Az ún. komplementer-kaszkód (4-7. ábra) feszültség-erősítése azonos R_c értékek mellett a közös CE kapcsolás erősítésének a fele, a bemenő impedancia és a sávszélesség viszont megduplázódik a CE fokozat hasonló paramétereire képest. Ügyelni kell a DC előfeszítés értékére, s annak stabilizálására. A kapcsolást ma már csak integrált erősítőkben alkalmazzák.

Itt jegyezzük meg, hogy sem a 4-6. sem pedig a 4-7. ábra nem tartalmazza azokat az áramköri komponenseket, melyek a munkapont stabilizálását biztosítanák.

4.5. Teljesítményerősítők

Az erősítők olyan aktív elemekből épülnek fel, amelyek alkalmasak teljesítményerősítésre. Teljesítményerősítőknek viszont az olyan erősítőket szoktuk nevezni, amelyeknél a rendszer kimenő teljesítménye *lényeges*. Ezt a határt különböző értékeknél lehet definiálni, egyes alkalmazásoknál ez lehet néhányszor tíz mW is (orvosi berendezések), de általában W nagyságrend a szokásos kritérium.

Teljesítményerősítők esetében a végfokozat méretezése, bizonyos esetekben a végfokozatot meghajtó fokozatok méretezése tér el a szokásostól.

A végfok méretezésnél lényegesek a

a, Hasznos kimenő teljesítmény, P_{\sim}

b. A fokozat által felvett egyenáramú teljesítmény; P_T

c, a, és b, aránya, a fokozat hatásfoka, η

d, A végfokozatot felépítő tranzisztorok (bipoláris, FET) által disszipált teljesítmény, P_d , valamint a tranzisztorok max. C-E, illetve D-S feszültsége, az emitter- ill. drain-áram max. értéke, a berendezés környezetének hőmérsékleti tartománya.

e, A végfokozat teljesítményerősítése A_p , a szükséges bemeneti feszültség-, és áramigény.

Látható, hogy a szokásostól eltérő szempontokat és körülményeket kell figyelembe vennünk.

Az ideális teljesítményerősítő-végfokozat a szükséges kimenő teljesítményt minimális teljesítményfelvétel és nemlineáris torzítás mellett biztosítja úgy, hogy a fokozat teljesítményerősítése és kialakítása nem teszi szükségessé a meghajtó fokozatnak a szokásostól eltérő kialakítását. Itt máris megjegyezzük, hogy a MOS eszközök *ebből a szempontból* verhetetlenek.

4.5.1. A félvezetők határadatai

Határadatok (*absolute maximum ratings*) alatt azokat az elektromos értékeket értjük, melyek túllépése esetén a gyártó cég nem vállal felelősséget abban az esetben, ha félvezető tönkremegy. („Paraméterei irreverzibilisen megváltoznak”)

a, A félvezető működési és tárolási hőmérsékleti tartománya. (Tárolás esetére általában a tartomány alsó határa lényegesen alacsonyabb, mint a működés esetére megadott érték)

A tartomány felső határértéke nem a környezeti hőmérsékletre, hanem bipoláris tranzisztor esetén a c-b átmenetre, FET esetén pedig a csatornára vonatkozik.

b, Disszipált teljesítmény, P_d ,

Ez a félvezető kollektor (drain) árama, valamint kollektor-emitter (drain-source) közötti feszültség pillanatnyi értékeinek szorzatából számított átlagérték; azaz az a villamos teljesítmény, ami a félvezető melegedésére használódik el. Értéke a félvezető típusán kívül a kollektor-bázis átmenet, (gyakorlatilag a kollektor), illetve a MOS csatorna hőmérsékletétől függ. A félvezető a, pontban említett felső hőmérsékleti határértéke mellett a megengedhető disszipáció értéke $0W$.

c, Feszültségértékek

Lényeges határadat a nyitott bázis mellett megengedhető max. kollektor-emitter feszültség V_{CEO} . Ennél magasabb érték engedhető meg, ha a bázis-emitter kört ellenálláson keresztül zárjuk (V_{CER}), még nagyobb, ha rövidre zárjuk (V_{CES}), esetleg kis belső ellenállású záró-feszültséggel zárjuk le (V_{CEV}) Elvileg a legmagasabb megengedhető feszültségérték a nyitott emitter mellett a kollektor-bázis közötti feszültség határértéke (V_{CBO}).

MOS tranzisztoroknál fenti értékeknek a drain-source között megengedhető max. feszültség (V_{DSS} „*surrender voltage*”) felel meg.

Lényeges a max. lehetséges záróirányú emitter-bázis, ill. gate-source feszültségérték.⁷⁴

d, áramértékek

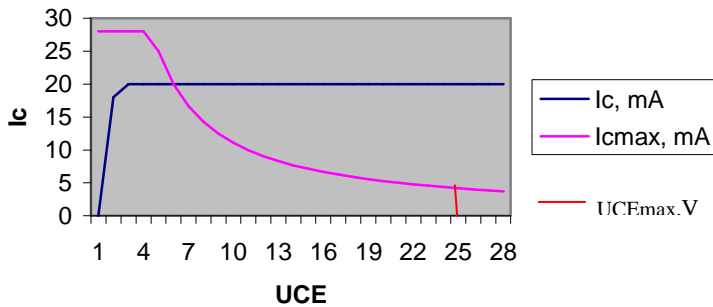
Nem haladhatjuk túl a max. megengedhető átlagos kollektoráram-értéket (I_{cmax}), de ezen kívül meghatározzák azt a csúcserőértéket is, amely pl. impulzusüzemben megengedhető. (I_{cMmax}). Az utóbbi lényegesen meghaladhatja az előző értéket. MOS tranzisztoroknál lényeges határadat a max. drain-áram értéke.

Hasonlóképpen nem léphetjük túl az előírt bázisáram-értékeket sem. (I_{bmax}),

A tranzisztor működési tartományát a FE kimeneti karakterisztikán ($I_c = f(U_{CE})$) ún. határolt hiperbola mutatja meg. A hiperbola a max. disszipálható teljesítményre, a határoló egyenes-szakaszok pedig a max. I_c áramra, ill. U_{CE} feszültségre utalnak. (4-8. ábra, 89. oldal)

⁷⁴ Ha a záróirányú feszültséget nagy impedancián keresztül bocsátjuk az emitter-bázis átmenetre, (lényeges, hogy az áram értékét a max. megengedett bázisáram szintje alatt limitáljuk) a tranzisztor b-e diódája zener-diódaként viselkedik, az átmenet letörése nem irreverzibilis.

4-8. ábra. Tranzisztor megengedett üzemi tartománya. $P_{dmax} = 100 \text{ mW}$, $I_{cmax} = 28 \text{ mA}$, $U_{CEmax} = 25 \text{ V}$



A 4-9.. ábrán egy igen népszerű bipoláris teljesítmény-tranzisztor határadatait adjuk meg.

MOSPEC

COMPLEMENTARY SILICON HIGH-POWER TRANSISTORS

... designed for use in general purpose power amplifier and switching applications.

FEATURES:

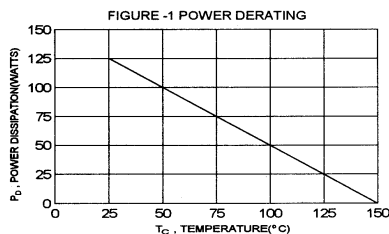
- * Collector-Emitter Sustaining Voltage - $V_{CEO(min)} = 45V$ (Min)- BD249, BD250
60V(Min)- BD249A, BD250A
80V(Min)- BD249B, BD250B
100V(Min)- BD249C, BD250C
- * DC Current Gain $hFE = 10$ (Min)@ $I_C = 15A$
- * Current Gain-Bandwidth Product $f_T = 3.0 \text{ MHz}$ (Min)@ $I_C = 1.0A$

MAXIMUM RATINGS

Characteristic	Symbol	BD249 BD250	BD249A BD250A	BD249B BD250B	BD249C BD250C	Unit
Collector-Emitter Voltage	V_{CEO}	45	60	80	100	V
Collector-Base Voltage	V_{CBO}	55	70	90	115	V
Emitter-Base Voltage	V_{EBO}	5.0				V
Collector Current - Continuous - Peak	I_C	25 40				A
Base Current	I_B	5				A
Total Power Dissipation@ $T_C = 25^\circ\text{C}$ Derate above 25°C	P_D	125 1.0				W W/ $^\circ\text{C}$
Operating and Storage Junction Temperature Range	T_J, T_{stg}	-65 to +150				$^\circ\text{C}$

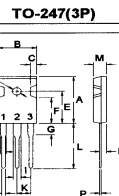
THERMAL CHARACTERISTICS

Characteristic	Symbol	Max	Unit
Thermal Resistance Junction to Case	$R_{\theta jc}$	1.0	$^\circ\text{C/W}$



NPN	PNP
BD249	BD250
BD249A	BD250A
BD249B	BD250B
BD249C	BD250C

25 AMPERE
COMPLEMENTARY SILICON
POWER TRANSISTORS
45-100 VOLTS
125 WATTS



PIN 1.BASE
2.COLLECTOR
3.EMITTER

DIM	MILLIMETERS	
	MIN	MAX
A	20.63	22.38
B	15.38	16.20
C	1.90	2.70
D	5.10	6.10
E	14.81	15.22
F	11.72	12.84
G	4.20	4.50
H	1.82	2.46
I	2.92	3.23
J	0.89	1.53
K	5.28	5.98
L	18.50	21.50
M	4.68	5.36
N	2.40	2.80
O	3.25	3.65
P	0.55	0.70

4-9. ábra BD 249-BD250 tranzisztorok határadatai

4.5.2. Energetikai paraméterek számítása együtemű végfokozatoknál

Ezek a paraméterek nem csak a kapcsolás, hanem a választott munkapont, és az erősítő fokozat kivezrlésének függvényei is. A munkapont kiválasztását a jövőben optimálisnak, azaz a legnagyobb kivezrlési tartományelérésének megfelelőnek tekintjük, a kivezrlés mértékét pedig „k” koefficienssel jelöljük, amely az adott kimeneti jel, és a teljes kivezrlési tartomány hányadosa. A legegyszerűbb, kisimpedanciás terhelésre alkalmas végfokozat az emitterkövető-kapcsolás. Szélessávú, valós terhelésű átvitel esetén (DC erősítő) úgy kaphatjuk a legnagyobb hatásfokot, hogy az emitterkövető emitterellenállása a terhelő impedancia. (4-9. ábra). A hatásfok ideális munkapont-választás, és max. kivezrlés (k=1) esetén 25 %. Kisebb kivezrlés esetén a hatásfok *k érték négyzetével* arányosan csökken:

$$\begin{aligned} P_{\sim} &= U_m^2 / 2R_t = k^2 (U_T/2)^2 / 2R_t; \\ P_T &= U_T^2 / R_t (= P_{dmax}, \text{ ha } k=0) \\ \eta &= k^2 / 4 \end{aligned} \quad (8) \text{ NB}$$

ahol R_t a kimeneti terhelő impedancia soros ekvivalens kapcsolásának valós komponense.

Nagyobb hatásfokot DC átvitel esetén elérni nem lehet. 50 % -os hatásfok megközelítésére is csak akkor van lehetőség, ha a terhelés nem ohmikus, hanem olyan elem, amely DC-hez közeli frekvenciákon gyakorlatilag rövidzár, és a működési frekvenciatartományon belül valós impedanciát képvisel. (A kimenet fojtó, vagy transzformátoros kiépítésű). Ezek a kapcsolások egyrészt természetesen nem alkalmasak DC átvitelre, az átviteli sáv alsó határfrekvenciáját az alkalmazott fojtó, vagy transzformátor induktív értékei határozzák meg, másrészt az induktív elemek általában ferritmagra csévelt kivitelűek, ami — elsősorban a nagy kimenő teljesítmények esetén — további nemlineáris torzítások okozói. Lényeges, hogy ilyen esetekben a max. áram értékének túllépésének meggátlása céljából gondoskodnunk kell járulékos védelmi áramkörök alkalmazásáról is.

Fent felsorolt okok miatt ezt a megoldást ma már kevésbé használjuk, a hatásfok növelésének, a disszipált teljesítmény csökkentésének útja az *ellenütemű végfokozat*.

4.6. Ellenütemű kapcsolású végfokozatok

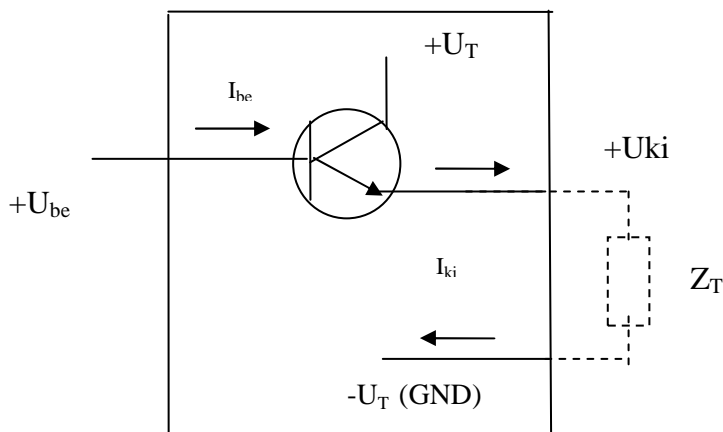
Jobb hatásfokot, és — bizonyos esetekben — a kivezrlés mértékében nagyobbra is monoton növekvő disszipált teljesítményt — un. ellenütemű („push-pull”) kapcsolású végfokozat mellett kaphatunk. Napjainkban bizonyos teljesítményértékek felett szinte kizárólag ezzel a megoldással találkozhatunk.

Az ellenütemű végfokozat valójában két, a négyfókus-elmélet szerint párhuzamosan kapcsolt DC csatolású végfokozat, (4-11. ábra) jellemezve azzal, hogy

a, *beállítható olyan munkapont*, ahol az egyes fokozatok kimeneti áramiránya ellentétes, és az áramok értéke egyenlő.

b, a bemenet valamely irányú változása esetén a két fokozat áramának változása algebrailag egyező, abszolút értéket tekintve ennek következtében különböző irányú.

Mielőtt a részletesebb tárgyalásba belekezdenénk, definiálnunk kell az erősítő működési üzemmódjának osztályba-sorolását *általában*.



4-10. ábra. Emitterkövető alapú DC átvitelre is alkalmas együtemű végfokozat (elvi rajz).
 $-U_T$ alkalmazása lehetővé teszi pozitív, vagy negatív bemeneti jelek átvitelét, ha a terhelés nem kapcsolódik a földhöz.

Az osztályba sorolásnál azt vizsgáljuk, hogy a bemenet harmonikus gerjesztése esetén mekkora az a fázisszögérték, ami alatt a fokozatban áram *folyik*. (Egy teljes periódus szögértéke 2π).

Ennek a szögértéknek a *felét* nevezzük folyási szögnek, és — meglepő módon az egész világon, valamennyi irodalmi forrásban egyformán — θ —val jelöljük.

Ha az erősítő beállítása olyan, hogy a bemeneti gerjesztés valamennyi értékének 0-nál nagyobb áramérték felel meg, azaz θ értéke π , az erősítő az adott gerjesztési érték mellett A osztályban működik.

Ha az adott gerjesztés mellett θ értéke $\pi/2$, az üzemmód B osztályú.

Ha az adott gerjesztés mellett $\pi/2 < \theta < \pi$, az üzemmód AB osztályú.

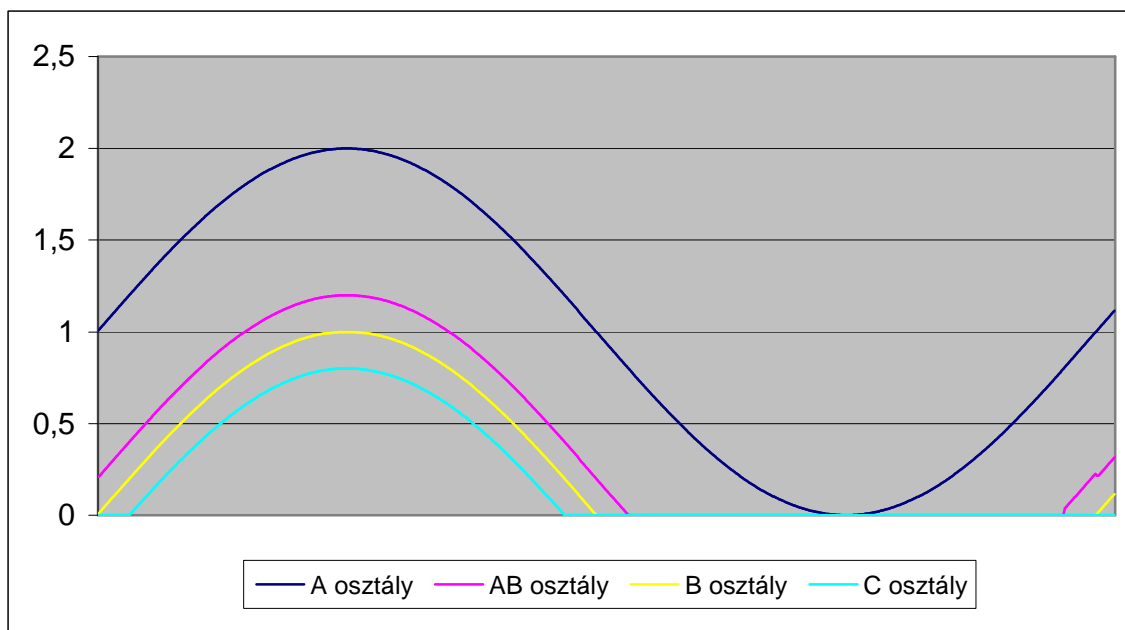
Ha az adott gerjesztés mellett $\theta < \pi/2$, az üzemmód C osztályú.⁷⁵

Együtemű DC erősítő esetében az üzemmód természetesen csak A osztályú lehet, az 5.5.2. pontban valójában ezt a kivitelet mutattuk be.

4.6.1. Ellenütemű végerősítő kapcsolások

A különböző irányú kimeneti áram-igény legegyszerűbben n-p-n és p-n-p tranzisztorok kombinációjával érhető el. (un. „komplementer” végfokozat). Ebben az esetben a vezérlés elvileg egy közös pontból is elképzelhető, gyakorlatilag a munkaponti áramértékek beállítására a meghajtó fokozatot némileg módosítani kell. A két bemenet közötti „szétcsúsztatás” kivitelezésére több módszer is kínálkozik, elterjedt a végtranzisztorok meghajtására is ellenkező polaritású bipoláris tranzisztorokkal felépített emitterkövető-kapcsolást használni. (A 4-12. ábra elvi megoldást szemléltet)

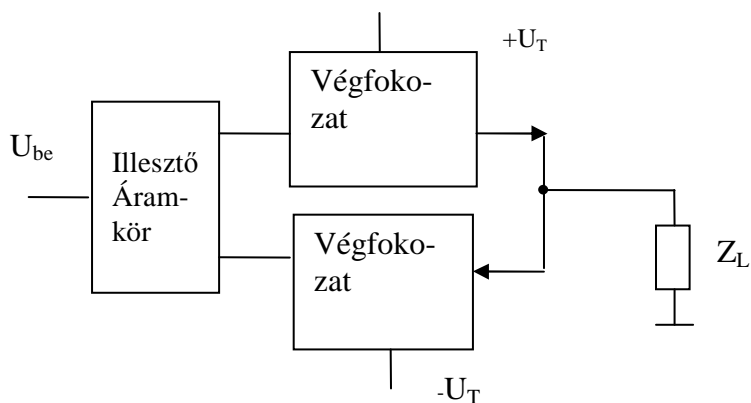
A 10. ábrán bemutatjuk valamilyen erősítő kimeneti áramalakjait harmonikus gerjesztés esetén A, B, AB és C osztályú üzemmód mellett.



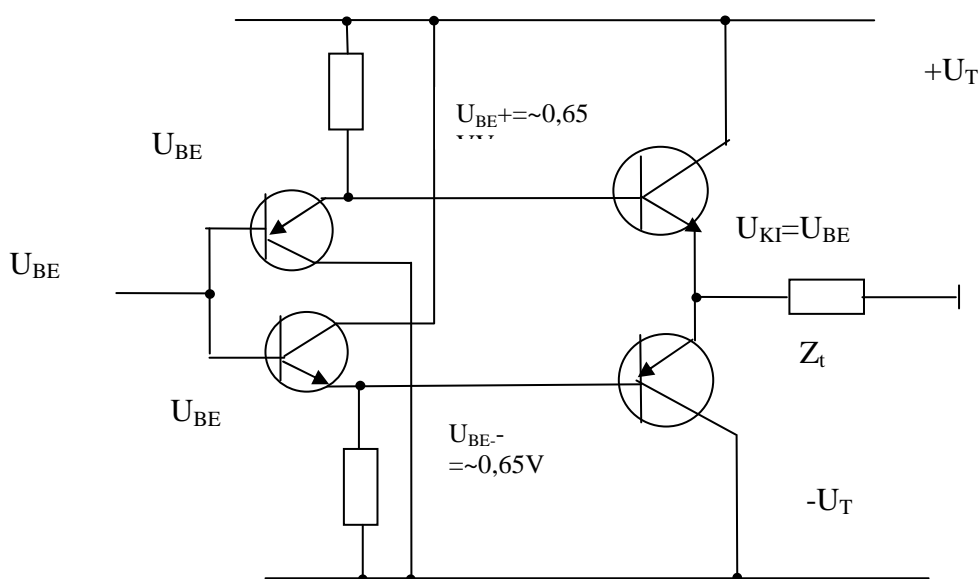
4-11. ábra Erősítők üzemmódjai

Az ábrán az erősítő kimeneti áramalakja látható, harmonikus gerjesztés mellett

⁷⁵ Létezik még „D” osztályú üzemmód is, de ez már nem vonatkozik analóg jelekre.



4-12. ábra. Ellenütemű végfokozat felépítése és áramirányai



4-13. ábra. Ellenütemű végfokozat meghajtása komplementer bipoláris tranzisztorokkal

4.6.2. A osztályú ellenütemű végfok elemzése

Mint látni fogjuk, „A” osztályú üzemmód mellett is lényeges hatásfokjavulás érhető el, így — bár nem elterjedt — ez az üzemmód is elemzésre érdemes. A 13. ábráról leolvasható, hogy teljes kivezrlésnél mindkét tranzisztor C-E feszültsége $0V - 2U_T$ (az ábrán $2 \cdot 2 = 4V$) között ingadozik. Az egyes tranzisztorok átlagárama $U_T/2 R_T$ (ohmikus terhelés mellett), ily módon az energetikai adatok a 4-13. ábra alatti (9) egyenlet szerint alakulnak:

A felvett teljesítmény értéke	$P_T = 2U_T^2/2 R_t = U_T^2/ R_t$	
Maximális disszipáció tranzisztoronként:	$P_{dmax,k=0,} = U_T^2/ 2 R_t$	(9) \mathcal{NB}

A hasznos kimenő teljesítmény értéke	$P_{\sim} = U_m^2 / 2 R_t = k^2 (U_T)^2 / 2 R_t$;
Hatásfok, %	$\eta = 100 \cdot 0,5k^2$

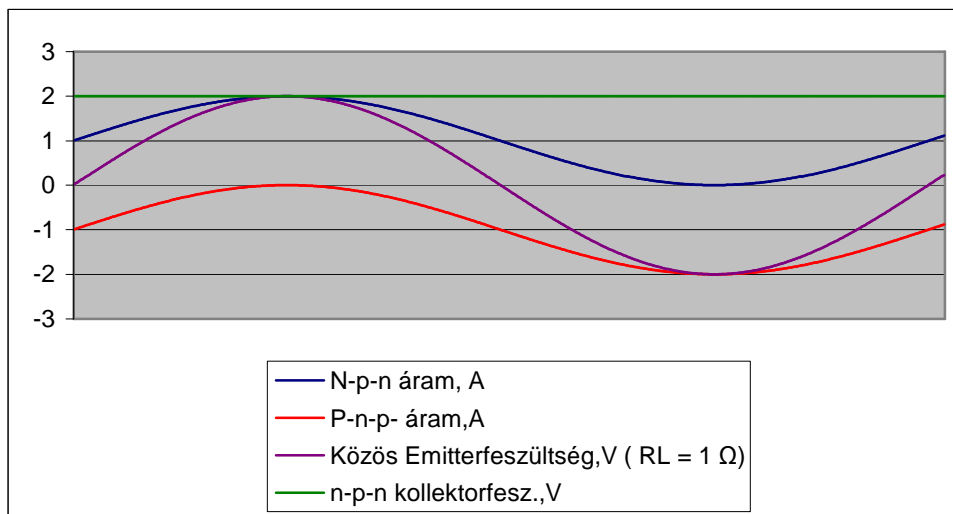
Összehasonlítva az adatokat az együtemű végfok adataival, összegezhethetjük, hogy:

A felvett teljesítmény kétszer akkora;

A hatásfok – ugyanolyan „k” érték mellett” szintén kétszer akkora, a kivezéréstől — az együtemű végfokkal megegyezően — négyzetesen függ;

Az egyes félvezetőre eső disszipáció ugyanakkora, a max. érték szintén k=0 értéknél lép fel.

Ez a megoldás nagy lépés előre, de még sok gondot átörökít az együtemű végfoktól.



4-14. ábra

„A” osztályú ellenütemű komplementer végfok áram- és feszültségviszonyai k=1 érték mellett

4.6.3. B osztályú végfokozat elemzése.

Ebben az üzemmódban látszólag megoldódnak gondjaink: Javul a hatásfok, kivezéréssel nélkül nincs disszipáció sem, és a disszipáció a kivezéréssel kis „k” értékek esetén monoton nő.

A felvett teljesítmény értéke	$P_T = 2U_T I_{max} / \pi = U_T^2 / R_t (2k/\pi)$	
A hasznos kimenő teljesítmény értéke	$P_{\sim} = U_m^2 / 2R_t = (U_T)^2 / R_t (k^2/2)$;	(10) \mathcal{NB}
Disszipáció tranzisztoronként:	$P_d = (P_T - P_{\sim}) / 2 = U_T^2 / R_t (k/\pi - k^2/4)$	
Hatásfok, %	$\eta = 100 \cdot k\pi/4$	

Valamennyi érték „k” függvénye, a $P_d = f(k)$ függvénynek maximuma van. A szokásos matematikai eljárás során kaphatjuk, hogy

$$k_{\max Pd} = 2/\pi; \quad (11)$$

$$P_{d\max} = 1/\pi^2 (U_T^2 / R_l) = 2/\pi^2 P_{\sim\max}$$

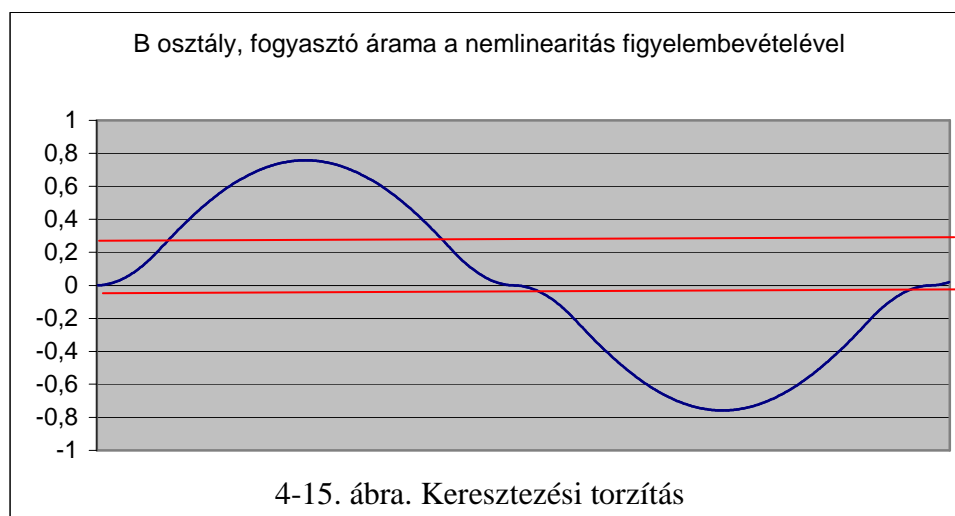
$$\eta_{\max Pd, \%} = 50$$

A tranzisztorok max. disszipációja tehát ideális esetben a max. kimenő teljesítmény 20,3% lenne.

A „B” osztályú vezérlés fő problémája az ún. „keresztelési torzítás”⁷⁶ (ne tévesszük össze a keresztmodulációval...). Elsősorban bipoláris tranzisztorok használata esetén, csökkenő emitteráramok mellett a végfok erősítése (re értéke) annyira lecsökken, hogy a kimeneti jelben a „B” osztályra jellemző keresztelési torzítás lép fel.(4-14.ábra)

Definiálható az a minimális emitteráram, ($I_{\min.}$) amely az adott kimeneti terhelés mellett még lineárisnak tekinthető átvitelt biztosít. (A 15. ábrán piros vonallal jelöltük)

Ezért a keresztelési torzítások csökkentésére, (megszüntetésére) a kimenetet AB osztályba kell vezérelnünk oly módon, hogy a vezérlés nélküli áram (I_0) értékének mindkét tranzisztor esetén a minimális emitteráram értékének kb. 50%-ának kell lennie.

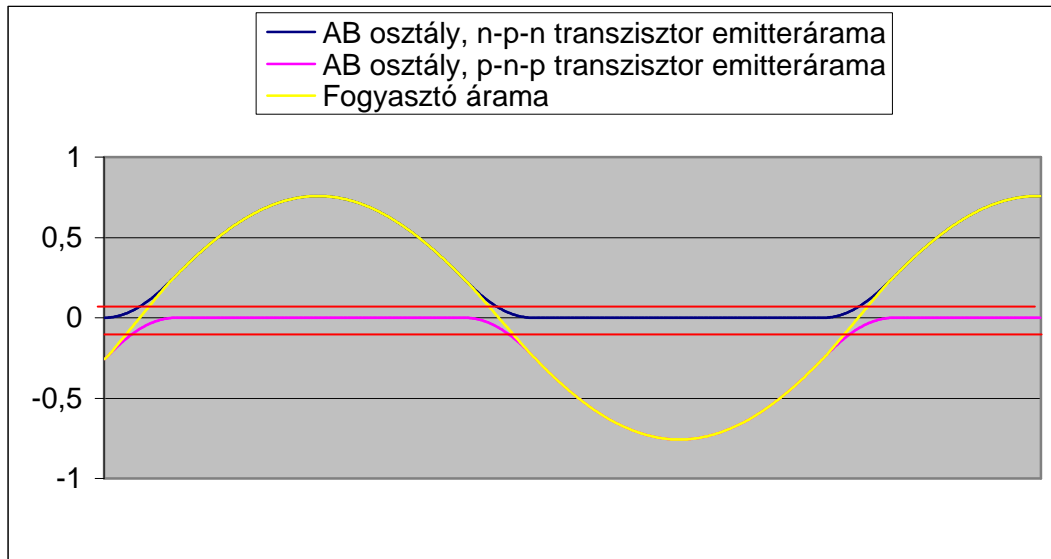


Az AB osztályban működő erősítők elemzésétől eltekintünk. Mérnöki gyakorlatban elegendő, ha a felvett teljesítmény értékének számításához az adott végfokozat „B” osztályú teljesítményfelvételét $\sim 0,4 U_T I_0$ értékkel megnöveljük. Ennek hatására elsősorban kis „k” értékeknél csökken a hatásfok, némileg nő a disszipált teljesítmény, a max. P_d érték viszont alig változik, és az ennek megfelelő „k” érték is csak kis mértékben csökken.

⁷⁶ A laboratóriumi segédletben szereplő meghatározást használtuk, elterjedt még a „nullponttorzítás” meghatározás is.

Ügyeljünk viszont arra, hogy az I_0 értékkel ne haladjuk meg lényegesen a szükséges $I_{\min}/2$ érték felé. Ez nemcsak felesleges teljesítményfelvételhez és disszipációhoz vezet, hanem komoly linearitási gondokat is okozhat.

A 4-16. ábrán illusztráljuk, hogy az AB osztályú működés milyen módon kompenzálhatja a kereszttorzítást.



4-16. ábra
AB osztályú végfokozat áramalakjai
(vörös vonalakkal az I_0 értékeket jelöltük)

4.7. Visszacsatolás használata és hatása aktív hálózatoknál

Aktív hálózatoknál többnyire az alábbi—mindeddig csak felületesen érintett—problémák merülhetnek fel:

- noha a jósági tényező (GB faktor) magas, de ezen belül alacsony a sávszélesség;
- az erősítési tényező nem kézmentartható, igen nagy a szórása, és a hőmérsékletfüggése;
- nagy a rendszer nemlinearitása, a kivezérlési tartományt valójában nem tudjuk kihasználni;
- a munkaponti beállítás instabil, erősen függ az egyes alkatrészek szórásától (diszkrét megvalósítás)⁷⁷ és/vagy a hőmérséklettől⁷⁸, DC erősítők megvalósítása igen nehéz;

Fenti problémák orvoslásának egyik hatékony, bár óvatos kezelést igénylő eszköze a negatív visszacsatolás. *A megvalósítás alapelve a természettudományok teljes keresztmetszetére jellemző, a fejlődés, az élet alapvető mechanizmusa.*

⁷⁷ Id. „érzékenység, alkatrészek értékének szórása (tolerancia) c. fejezetet

⁷⁸ Kétségkívül beszélni kellett volna a hőmérsékleti tényezőről, elsősorban végfokozatok esetén, de ez külön jegyzetet igényelne. Pedig a munkapont instabilitása A és AB osztályú végfokozatoknál a végtranzistorok tönkremeneteléhez is vezethet. (vezetett is)

Az alapelv egészen röviden megfogalmazható: **Valamely folyamat eredményének befolyásolnia kell a folyamatot működtető mechanizmust.**

Az elektronika rideg világába ezt úgy fordíthatjuk le, hogy valamely hálózat működését jelentősen megjavíthatjuk, ha a hálózat kimeneti jelét megfelelő módon visszacsatoljuk (kötjük) a hálózat valamely bemeneti pontjára oly módon, hogy a visszacsatolás eredményeképpen létrejövő új hálózat az eredetinél kisebb erősítéssel rendelkezzen. *A visszacsatoló hálózat átviteli tényezőjét B -vel jelöljük, és a visszacsatolás mélységének nevezzük. B értékének számításánál figyelembe kell venni a visszacsatolandó hálózatnak a visszacsatoló hálózat kimenetére ható terhelését is. (4-17. ábra)*

A negatív visszacsatolás általában a rendszer stabilitását növeli, míg a pozitív csökkenti azt, egészen a belengésekig, majd a begerjedésig.

Alapvető problémánk rendszerint a visszacsatolás megfelelő formájának, a megfelelő átviteli tényezőnek a megtalálása, hogy az eredetileg kitűzött célunkat csakugyan elérhessük.

A visszacsatolt kimeneti jellemző (feszültség, áram), valamint a bemenetre történő visszacsatolás jellege (a visszacsatoló hálózat kimenetét a bemenettel sorba, vagy párhuzamosan csatoljuk) a visszacsatoló rendszereket négy alapvető csoportba oszthatjuk:

Soros feszültség-visszacsatolás (sU)

Soros áram-visszacsatolás (sI)

Párhuzamos feszültség-visszacsatolás (pU))

Párhuzamos áram-visszacsatolás (pI)

Átgondolt, jól tervezett negatív visszacsatolás *növeli a rendszer linearitását, stabilizálhatja a munkapontot, növeli az étviteli sáv szélességét*, mindezek fejében csökkenti az erősítést.

Nem javítja a negatív visszacsatolás a

kivezérlési tartomány nagyságát, (bizonyos esetekben erősen csökkentheti!)

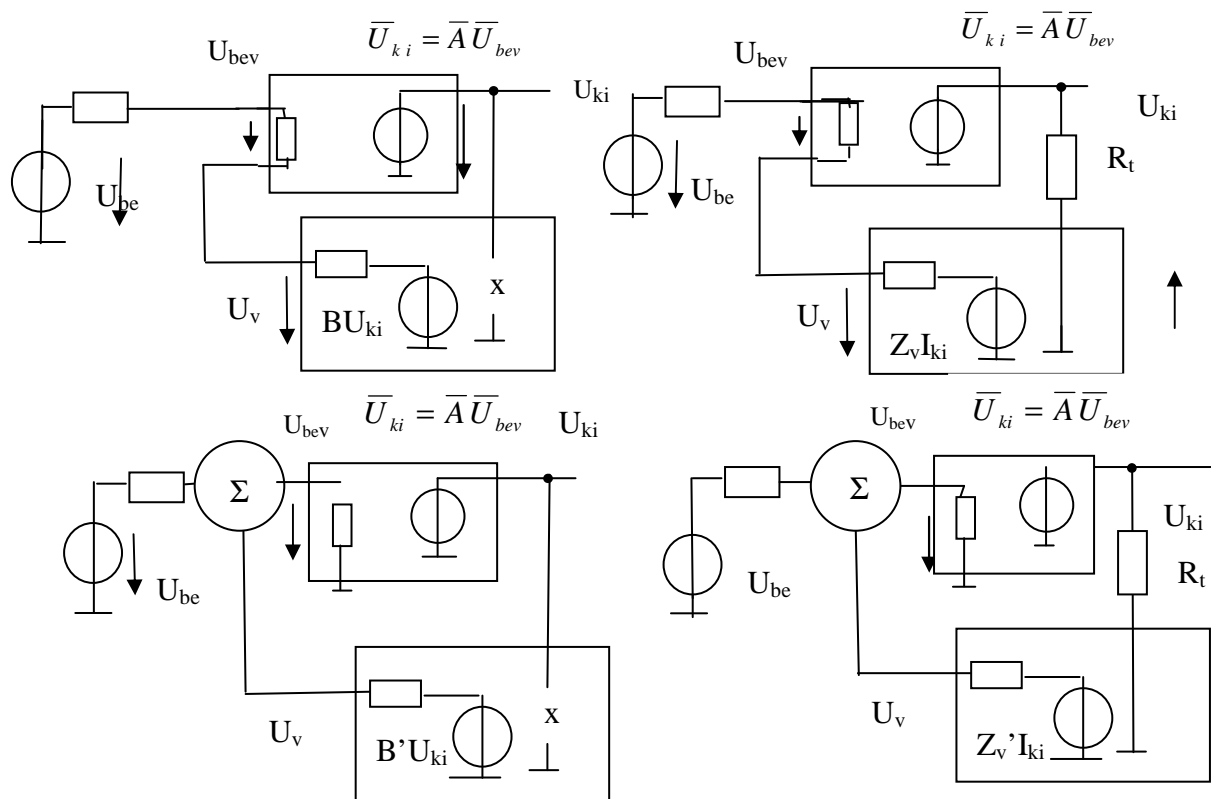
az erősítő zajtényezőjét (ld. VII. fejezet).

A linearitás javulása, a sáv szélesség növelése közvetlenül arra a jellemzőre vonatkozik, amely a visszacsatolás forrása (áram, vagy feszültség)

Aránylag gyenge negatív visszacsatolás nem hat a GB faktorra (jósági tényezőre), mélyebb negatív visszacsatolás viszont ronthatja a GB faktort, és egyéb következménnyel is járhat. (Részletesebben ld. V. fejezet, 5.7.3. pont).

A 16. ábrán láthatók a visszacsatolások alapmódoszatai. (Az ábrákon nem mutatjuk a visszacsatoló hálózat bemenő impedanciáját, az erősítőt sem jelöltük pontosan). Láthatjuk, hogy a visszacsatolt hálózat alapvetően két alhálózatra bontható: A (visszacsatolatlan) aktív hálózat-

ra, és a visszacsatoló rendszerre, melynek része a rendszer kimenetén, ill. az erősítő bemenetén található összegző-leosztó elem is



4-16. ábra. Visszacsatolások alapkapcsolásai
felső bal: sU; felső jobb: sI; alsó bal: pU; alsó jobb: pI

Σ — párhuzamos feszültségösszegző

Ha az összegző elem soros, azaz a visszacsatoló rendszer kimenetén előállított feszültség a bemeneti feszültséggel egyszerűen sorba kötődik, az erősítő bemeneti feszültsége a két feszültségérték különbsége. Ha a visszacsatoló rendszert megszakítjuk, a bemenetre a rendszert vezérlő fokozat kimeneti feszültsége kerül. A visszacsatolás bekapcsolásával a bemeneti feszültség a két feszültség, az eredeti feszültség és a visszacsatolt feszültség összege lesz.:

$$U_{bev}(s) = [U_{be}(s) - U_v(s)]$$

Az összegző elem párhuzamos is lehet, ez sokkal egyszerűbben kivitelezhető, valójában áramok összegzésén alapul. Ebben az esetben az összegző bemenetére érkező bemeneti és visszacsatolt jelek az összegzőre jellemző súlyozással adódnak össze. (A visszacsatolt hálózat becsatlakozásának megszakításával a súlyozás megváltozhat!)

$$U_{bev}(s) = [\alpha U_{be}(s) + \beta U_v(s)]$$

A visszacsatoló hálózat bemenetére beköthető az aktív hálózat kimeneti feszültsége (feszültség-visszacsatolás) vagy visszacsatolható a bemenetre a rendszer kimeneti áramával arányos feszültség. Ezt a megoldást általában abban az esetben alkalmazzuk, ha az erősítő kimeneti árama hozzáférhető. Gyakran a kimeneti áram helyett az aktív hálózat kimeneti fokozatának emitteráramát használjuk fel, ebben az esetben gondot jelenthet, hogy az említett áramnak a kimeneti áramhoz viszonyított arányossági tényezője a kimeneti terhelés (R_t) függvénye. A 16. ábrán említett megoldás abban az esetben alkalmazható, ha az erősítő integrált kivitelű, és a terhelés mindkét csatlakozási pontja elérhető.

Alábbi levezetéseink az aszimmetrikus erősítőkre vonatkoznak, a szimmetrikus erősítők esetében az egyenletek előjel-módosítással érvényesek. (V. fejezet, 5.7.1. pont)t).

A visszacsatolás mechanizmusa, jellemzői és hatása legkönnyebben a klasszikus sU formánál tanulmányozható. Az erősítő bemenetére $U_{be}(s)+U_v(s)=U_{bev}$ feszültség hat. Az erősítő erősítése legyen $A(s)$ ⁷⁹, a visszacsatoló rendszer feszültség-áttételi tényezőjét jelöljük $B(s)$ -sel. Ekkor az $U_v(s)$ feszültség értéke

$$U_v(s) = -U_{ki}(s)B(s) = U_{bev}(s)A(s)B(s) = [U_{be}(s) - U_v(s)]A(s)B(s); \quad (12)$$

Az egyenletet kifejezzük $U_{ki}(s)$ értékre, majd kiszámítjuk $A_v(s) = U_{ki}(s)/U_{be}(s)$ értékét:

$$A_v(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)B(s)} \quad \text{soros visszacsatolás} \quad (13)$$

Az $A(s) B(s)$ szorzatot $H(s)$ -sel jelöljük a magyar nyelvű anyagokban, ez a *hurokerősítés*, azaz $U_v / (U_{bev})$ értéke. $B(s)$ értéket a visszacsatolás értékének nevezzük.

Az átviteli sávban $A(s)$ kis hibával helyettesíthető az egyenáramon mérhető A_0 értékkel, $B(s)$ -re vonatkozóan a felhasználások nagy részében szintén B_0 érték helyettesíthető. Ebben az esetben A_0 és B_0 valósak, A_0B_0 szorzat (H_0) szintén valós. Pozitív H_0 érték mellett a visszacsatolás negatív, negatív érték mellett pozitív.

$$A_{0v} = \frac{A_0}{1 + A_0B_0} = \frac{A}{1 + H_0} \quad (14)$$

Soros feszültség-visszacsatolással igen gyakran találkozunk. Aszimmetrikus erősítőknél a rendszer önmagában tartalmazza, mert utólag egy integrált erősítőnél „ráépíteni” igen nehéz. Szimmetrikus erősítők esetén viszont — mint látjuk a 6.1.7. pontban — igen gyakran használjuk.

⁷⁹ Ebben a fejezetben az „A” *nem amplitúdó-karakterisztikát jelöl* (hiányzik az (ω) argumentum,) hanem aktív négy-pólus „s” argumentumú komplex átviteli függvényét. Technikai okokból a továbbiakban az „A” feletti felülvonástól eltekintünk. (Mivel „s” önmagában komplex változó, ez nem is lenne kötelező).

Ne feledjük, hogy a soros rendszerű negatív visszacsatolások megnövelik a bemenő impedanciát, így csak akkor hatásosak, ha az erősítőt kis belső ellenállású feszültségforrásról gerjesztjük. A rendszer kimenő impedanciája viszont lecsökken, és ezt gyakran ki szoktuk használni.

Párhuzamos feszültség-visszacsatolásnál a helyzet némileg módosul.

Az összegző bemenetére $U_{be}(s)$ és $B' U_{ki}(s)$ feszültségek kerülnek, kimeneti feszültsége $aU_{be}(s) + b B' U_{ki}(s)$. a és b az egyszerűség kedvéért legyen mindig valós, Jelöljük $bB'(s)$ értéket $B(s)$ -sel, így a végeredmény hasonló a (13) egyenlethez:

$$A_v(s) = \frac{aA(s)}{1 - A(s)B(s)} \quad (15) \quad \mathcal{NB}$$

I. A számláló „a” szorzója tiszta veszteség: az összegző csillapítása.

II. A 15. egyenlet szerint a kapott eredmény ebben a formában pozitív visszacsatolás.

Amennyiben párhuzamos *negatív* visszacsatolást szeretnénk elérni, úgy az $A(s)B(s)$ szorzat egyenáramú értékének, azaz A_0B_0 szorzatnak *negatív* előjelűnek kell lennie. Ennek elvileg két módja is van, gyakorlatban azonban általában „ A_0 ” értéke a negatív, azaz *párhuzamos visszacsatoláskor a visszacsatolandó erősítőt invertáló kapcsolásban szoktuk használni.*

A soros áram-visszacsatolás annyiban különbözik a feszültség-visszacsatolástól, hogy a visszacsatoló hálózat bemenetén az erősítő kimeneti áramát vezetjük át, s általában egyszerű ellenállással alakítjuk feszültséggé. Ezt az értéket leosztás után, vagy anélkül az erősítő bemenetére vezetjük vissza. Az áram-visszacsatolás —természetesen negatív visszacsatolás esetén —nem a kimeneti feszültség, hanem a kimeneti áram értékét stabilizálja.

$$U_v = I_{ki} Z_v$$

Soros áram-visszacsatolásnál a visszacsatolt rendszer transzkonduktanciája:

$$y_v(s) = \frac{y(s)}{1 + y(s)Z_v(s)} \quad (16)$$

illetve párhuzamos áramvisszacsatolásnál:

$y(s)$ — a rendszer visszacsatolás nélküli transzkonduktanciája

$$y_v(s) = \frac{ay(s)}{1 - y(s)Z_v(s)}; \quad (17)$$

N feledjük, hogy a négy-pólusok kimeneti áramirányainak definíciója következtében ebben az esetben $Z_v(s) = b/Z'_v(s)$

Az áramvisszacsatolást két esetben érdemes használni:

I., Lokális visszacsatolásnál, kis jóindulattal a CE fokozat emitteráramát kimeneti áramnak tekintve, az emitterkörbe egyszerűen átblokkolatlan ellenállást helyezünk el; (4-18. ábra)

II.: *Ha az a célunk, hogy elsősorban a terhelésen átmenő áram alakja egyezzen meg a rendszer bemeneti feszültségének az alakjával. (Nem harmonikus bemeneti jel mellett reaktáns terhelés — II. kötet)*

A negatív visszacsatolás alkalmazásának néhány esete.

a, Kizárólag az egyenáramú munkapont-stabilitás növelése

Ezt a megoldást természetesen csak abban az esetben alkalmazhatjuk, ha az átviteli sávnak alsó határa van, ahova a rendszerben pólust helyezhetünk el.

Ebben az esetben a visszacsatoló rendszernek aluláteresztő szűrőnek kell lennie, a szűrő ω_3 értékének $n=1$ (1-es fokszámú) kivitel (RC tag) az alábbi egyenletet kell kielégítenie::

$$B(s) = \frac{B_0}{1 + s/j\omega_3}, \text{ és } \omega_3 = \frac{\omega_0}{A_0 B_0}, \text{ ahol} \quad (19)$$

ω_0 — az erősítő rendszer kívánt alsó határfrekvenciája, A_0 — a visszacsatolatlan erősítő erősítése sávközépen, B_0 — a visszacsatoló rendszer erősítése egyenáramon.

Az egyszerű képlet feltételezi, hogy a visszacsatolatlan erősítő alsó határfrekvenciáját a DC visszacsatolású rendszer kívánt alsó határfrekvenciájának max. harmadrésére állítjuk be.

Ennek az alkalmazásnak hátránya, hogy a szokásos alsó határfrekvenciák esetén a visszacsatoló rendszerben általában igen nagy kapacitású kondenzátort kell felhasználnunk.

b, Frekvenciafüggő visszacsatolás a sáv szélesség növelésére

Kapcsolástechnikailag az előbbihez hasonló megoldás, a visszacsatoló láncban található aluláteresztő szűrő felső határfrekvenciája azonban ebben az esetben gondosan összehangolva megegyezik avval a felső határfrekvenciával, amelyet a visszacsatolt rendszeren *frekvenciafüggetlen visszacsatolás esetén* mérhetnénk. Mérnökök között elterjedt, divatos fogás. A szűrő fokszámát az előbbi rendszer frekvenciamenetének esési sebessége határozza meg. Veszélyes, könnyen vezethet a rendszer begerjedéshez, és egyéb gondokat is okoz. (4.7.1.). Kerülendő!

4.7.1. Visszacsatolt rendszerekben fellépő specifikus torzítások

A visszacsatolt rendszereknél elkerülhetetlen, hogy a kis gerjesztések esetén igen jó fel— futású Heaviside-átvitelt⁸⁰ biztosító visszacsatolt erősítő kimenetén a jel nagyobb jelű vezérlések esetén jellegzetes torzulást ne szenvedjen. A visszacsatolás során ugyanis a jel az erősítő bemenetén, vagy közbülső pontjain előtorzulást kap, (kompenzálendő a visszacsatolatlan erősítő rosszabb átvitelét), ez az előtorzított jel már jóval a kivezéRTési

⁸⁰ Egységugrás-jelre adott válasz. Négyzögimpulzus átvitele esetén mindez természetesen a fel-és lefutási időre is vonatkozik.

tartomány elérése előtt túlvezérlődik. A hatás az un. „slew rate” (kúszási érték) effektus, melyet röviden az alábbiak szerint foglalhatunk össze:

Az erősítő kimenetén megjelenő jel esetében definiálható valamilyen maximális jelváltozási sebesség (pl. V/μsec érték), amely nem haladható meg. Ez azt eredményezi, hogy a fel- és lefutási idő egy bizonyos szint felett *a kimeneti jel értékének növelésével emelkedni kezd.*(4-18. ábra)

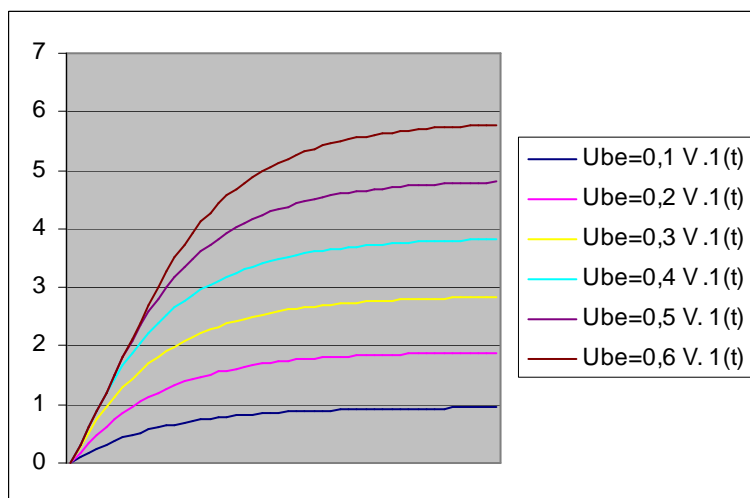
A slew-rate hatást az erősítőre kimeneti jelének maximálisan lehetséges. fel-vagy lefutási meredekséggel jelöljük, a kettő nem feltétlenül egyezik.

$$SR = \frac{\partial U_{ki}}{\partial t} \max \quad (20) \quad \mathcal{NB}$$

A rendszer tervezésekor fontos szempont, hogy a kimeneti jel .meredeksége ezt az SR értéket ne haladja meg, mert jellegzetes SR torzítás, („háromszögesezés”) lép fel.:

$$\frac{\partial U_{ki}}{\partial t} \leq SR$$

A Slew-rate mértékegysége V/s lehetne, de ennél mégis jobb a helyzet: általános a V/μs, V/ns mértékegység alkalmazása.



4-17. ábra
Slew-rate hatás

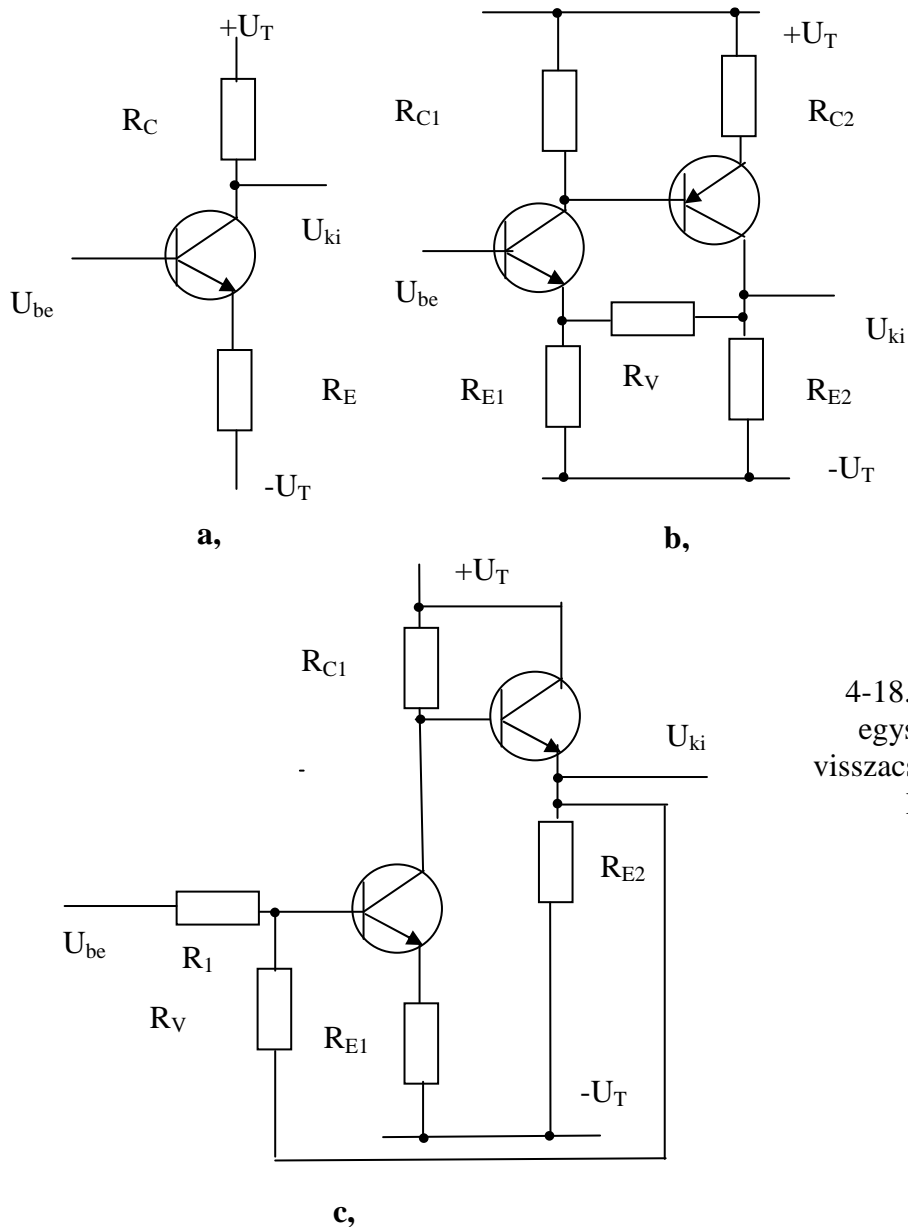
Az erősítő bemeneti jele különböző értékű Heaviside-jel

4.7.2. Egyszerű kivitelű negatív visszacsatolás diszkrét elemeket tartalmazó erősítőkben

A lokális visszacsatolás leggyakoribb esete a soros áram-visszacsatolás, és a párhuzamos/soros feszültség-visszacsatolás.

A 4-18.a ábra egy olyan CE fokozatot ábrázol, ahol az emittert ellenálláson keresztül kötöttük le a földre, ez az ellenállás képviseli a visszacsatolást. A visszacsatolás áram-visszacsatolás, a visszacsatoló hálózat „Z” paramétere R_E . A visszacsatolt feszültség az erősítő bemeneti feszültségével valóban sorba kapcsolódik, és a két feszültség különbsége képezi a gerjesztési

U_{be} -e feszültséget. B értéke $R_E/\alpha R_C$, a visszacsatolatlan erősítés értéke kis frekvenciákon $\alpha R_C/r_e$, a visszacsatolt rendszernél ez $\alpha R_C/(r_e+R_E)$ értékre módosul.



4-18. ábra. Néhány egyszerű kivitelű visszacsatolt DC erősítő kapcsolás

A 4.18. ábra „a” kapcsolása nem egészen korrekt megoldású, mert a visszacsatolás alapjául szolgáló áram valójában nem a kimeneti áram, és a bemeneti gerjesztés referenciaértéke (az emitter) nem egyezik meg a kimeneti feszültség referenciaértékével, (ezért paradox módon az R_C ellenállással párhuzamosan kapcsolódó kimeneti belső impedancia nem nő, hanem csökken a „klasszikus” CE fokozatéhoz képest).

A (b) és a „c” kapcsolás feszültség-visszacsatolás, a b, kapcsolás soros, a „c” kapcsolás pedig párhuzamos visszacsatolást mutat be.

Ellenőrző kérdések:

1. Sorolja fel az „Y” négypólus –együtthatókat, és adja meg fizikai értelmezésüket.
2. Miben különböznek a lineáris és nemlineáris torzítások? (Jelleg, előfordulás)
3. Mi az a THD?
4. Mi a kaszkód kombináció fő előnye?
5. „A” osztályú együtemű végfok esetén hogyan függ a hatásfok a kivezéRTési tényezőtől?
6. Ideális „B” osztályú ellenütemű végfokozat hatásfoka mennyiben függ a kivezéRTési tényezőről?
7. Mi a különbség a keresztmoduláció és a keresztezési torzítás között?
8. Miért kell alkalmaznunk visszacsatolást az erősítőknél?
9. Milyen visszacsatolási kombinációkat ismer?
10. Mit nevezünk hurokerősítésnek (H)? Mi a visszacsatolás értéke (B)?
11. Mi a „Slew-rate”? Mi a mértékegysége?

V. fejezet
Erősítők
Szimmetrikus bemenetű erősítők⁸¹

5.1. A szimmetrikus erősítők sajátosságai

Az aszimmetrikus erősítőknél – többek között két problémával szoktunk szembetalálkozni:

a, Amennyiben egyenáramú erősítőre van szükség (DC erősítő), elsősorban nagy feszültség-erősítési igény esetén jó lenne egy „mankó”, hogy a szükséges — esetenként időben is változó — bemeneti DC átlagos értéknek megfelelő tartományhoz alkalmazkodhassunk (pl. 6-6,01 V közötti tartományt, majd 3-3,01 V közötti tartományt erősítsünk fel százszorosára). Ezzel megegyező probléma az időben lassan változó jelek erősítése.

b, az erősítő bemenete a gerjesztő forrástól esetenként nagy távolságra található, s főleg ipari környezetben elég nagy az esély arra, hogy a bemeneti tápláláshoz additív zavar járul.

Mindkét esetben megoldást jelenthet a szimmetrikus bemenetű erősítő alkalmazása⁸². A szimmetrikus erősítők nem egy, hanem két bemenettel rendelkeznek, a bemeneti gerjesztésnek a két bemeneti jel különbségét tekintjük. A kimeneti jel (illetve annak túlnyomó része, az ún. szimmetrikus jel) a két bemeneti jel különbségével arányos. *A kimeneti jelnek azonban van egy olyan komponense is, amely nem a bemeneti jelek feszültségének különbségével, hanem azok átlagértékével — az ún. bemeneti közös feszültséggel arányos.* Ezen kívül általános esetben a kimeneti feszültségnek van egy konstans, a bemeneti gerjesztések értékétől független munkaponti feszültsége.

A szimmetrikus erősítők *kimenete* lehet aszimmetrikus vagy szimmetrikus

Szimmetrikus kimenet esetében a kimeneti információ a *kimeneti jelek különbsége*. (Szimmetrikus kimeneti jel) Ebben az esetben is létezhet természetesen munkaponti feszültség, amely a két kimenetre nézve egyforma polaritású, és közel egyenlő értékű egyenfeszültségű komponens.

⁸¹ Erősítőknél a feszültségerősítést „A”-val jelöljük.: $A(s)$, $\bar{A}(j\omega)$, $A(\omega)$ (erősítés abszolút értéke adott frekvencián). A fáziskarakterisztikát — mivel ez nem erősítő specifikus — ebben az esetben is $\varphi(\omega)$ -val jelöljük. A mérnöki gyakorlatban ez sajnos megszokott. Időnként előfordul a precíz „D” is, de nem gyakori.

⁸² A továbbiakban — az aszimmetrikus bemenetű erősítőkhöz hasonlóan — a szimmetrikus bemenetű erősítőket egyszerűen szimmetrikus erősítőknak fogjuk nevezni.

Fenti állítások abban az esetben értelmezhetőek, ha a be- és kimeneti feszültségek valamely közös referenciaponthoz képest fejezhetőek ki. Vannak kivételek, (szigetelt, pontosabban galvanikusan leválasztott erősítők,) de ebben a jegyzetben csak közös referenciapontú („földpontú”) szimmetrikus erősítőkkel foglalkozunk. Mivel a szimmetrikus erősítőnek két bemeneti és egy-vagy két kimeneti „kapuja”(a külső hálózathoz csatlakozó csomópontja) van, talán szerencsésebb a *három- vagy négykapu-rendszer* elnevezés, mint a három, öt, hat, vagy nyolcpólus-elnevezés, ami meglehetősen sok félreértésre adhat alkalmat.

A hatpólusokkal modellezhető erősítők (aszimmetrikus kimenetű szimmetrikus erősítők) közül kiemelt figyelmet érdemelnek a **műveleti erősítők**. *Egy hatpólusú szimmetrikus erősítőt abban az esetben nevezünk műveleti erősítőnek, ha teljesülnek az 5.6. pontban kimenő impedanciákat. (Ezt hamarosan pótoljuk).*

specifikált követelmények.

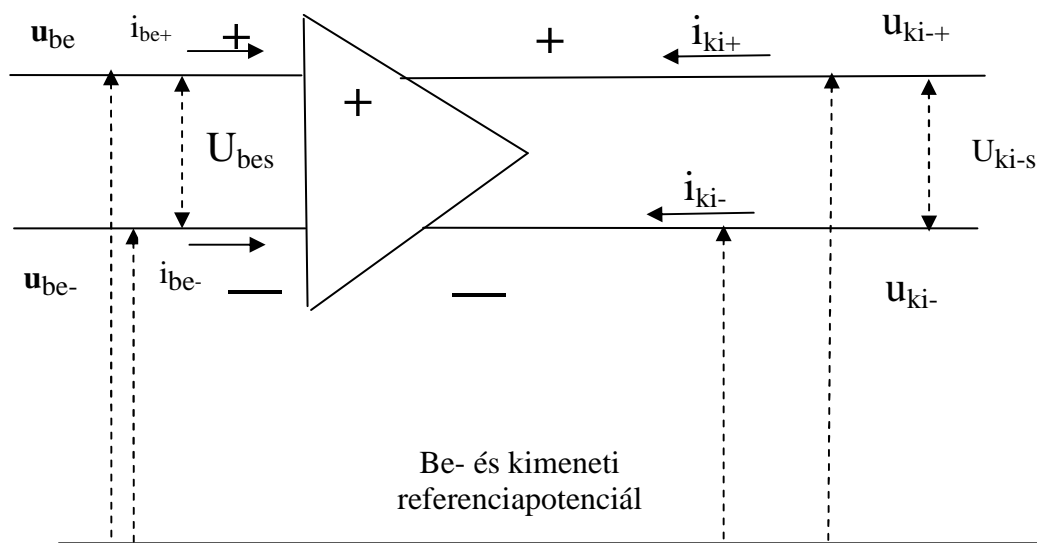
A továbbiakban az egyszerűség kedvéért galvanikusan nem leválasztott rendszerekről beszélünk, melyeknél valamennyi ki- és bemeneti feszültségforrás referenciapontja azonos. Ezt a csomópontot közös pontnak, régiesen egyszerűen földpontnak, vagy nullpontnak nevezzük.

Az 5-1. ábrán ilyen erősítőt mutatunk be. Az erősítőnek az ábrázolás szerint két bemenete és két kimenete van. A bemeneti gerjesztése szándékunk szerint *két bemenet, feszültségkülönbsége*, a kimeneti információt pedig szándékunk szerint a *két kimeneti pont feszültségének különbsége* szolgáltatja. Az ilyen erősítőt szimmetrikus be- és kimenetű erősítőnek nevezzük. Ha az erősítőnek egy kimenete van, ez azt jelenti, hogy a kimeneti jel a kimenet és a földpont közötti feszültségkülönbség. (aszimmetrikus kimenetű műveleti erősítő).

5.2. Szimmetrikus erősítő ekvivalens modellje. Szimmetrikus és közös gerjesztés és kimenet. Szimmetrikus és közös üresjárású átviteli függvények

A fenti kapcsolást lineáris ekvivalens modellel szokás helyettesíteni, melyben mind a bemeneti, mind a kimeneti feszültségeket a két feszültségérték átlagára, ill. különbségére bontjuk fel. Az 5-2. ábra feszültségmodell, azaz nem tüntettük fel sem a bemeneti, sem a kimenő impedanciákat. (Ezt hamarosan pótoljuk).

A lineáris modell csak akkor használható, ha a bemeneti vezérlés értéke — esetünkben a két bemeneti feszültség különbsége — elhanyagolhatóan csekély értékű, és ez minden erősítő elemre igaz: Ezek az elemek valójában nemlineáris eszközök, a kimeneti és bemeneti gerjesztések összefüggését *nem egyenes írja le*.



5-1. ábra,
Galvanikusan nem leválasztott szimmetrikus be- és kimenetű erősítő

A szimmetrikus erősítők alapvető tulajdonsága, hogy — első közelítésben — a kimeneti feszültség, vagy — szimmetrikus kimenetek esetén — kimeneti feszültségértékek különbsége nem valamely bemeneti feszültség nagyságától, hanem a bemeneti feszültségértékek különbségétől függ.

A bemeneti feszültségek átlagát közös vezérlőfeszültségnek (U_k), különbségét pedig általában differenciál-feszültségnek, de a magyar szaknyelvben szimmetrikus vezérlőfeszültségnek nevezzük. (U_s)

$$U_{bek} = \frac{U_{be+} + U_{be-}}{2} \quad U_{bes} = U_{be+} - U_{be-} \quad (1) \mathcal{NB}$$

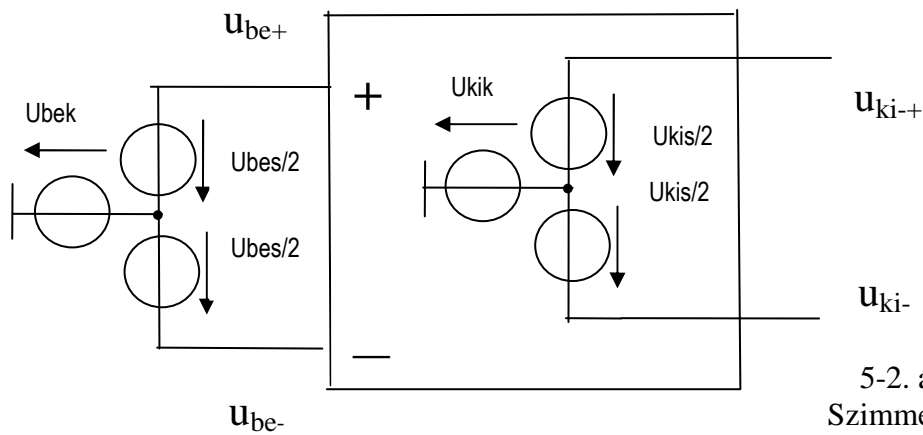
A szimmetrikus kimenetű erősítők kimenetei elvileg a kimeneti közös ponthoz képest is szimmetrikusak, de ez nem kötelező feltétel. Idealizált esetben a kimeneti feszültségértékek különbsége, az un. *szimmetrikus kimeneti feszültség* komplex operátorára a már említett alábbi egyenlet írható fel:

$$\Delta U_{kis} = \Delta U_{bes} \bar{A}_s(s), \quad \text{ahol} \quad (2),$$

$A(s)$ — a *szimmetrikus (differenciális) jelerősítési tényező*.⁸³

A „ Δ ” jel arra utal, hogy $U_{bes} = 0$ érték mellett a kimeneti U_{kis} jel nem feltétlenül 0, munkaponti eltolások lehetségesek.

⁸³ Ebben a fejezetben az „ A ” (ha hiányzik az (ω) argumentum) *nem amplitúdó-karakterisztikát jelöl*, hanem aktív többpólus „ s ” argumentumú komplex átviteli függvényét. Technikai okokból a továbbiakban az „ A ” feletti felülvonástól eltekintünk. (Mivel „ s ” önmagában komplex változó, ez nem is lenne kötelező).



5-2. ábra,
Szimmetrikus,
kimenetű
szimmetrikus erősítő

Az erősítő kimenetén a szimmetrikus jel mellett mérhető a kimeneti közös jelkomponens is:

$$U_{kik} = \frac{U_{ki+} + U_{ki-}}{2} \quad (3) \mathcal{NB}$$

A kimeneti feszültségértékek kialakításában szerepet játszik a közös bemeneti feszültség is.

A bemeneti közös feszültség változásakor (vagyis akkor, ha a bemeneti feszültségértékek különbsége változatlan marad, de az értékek eltolódnak valamilyen irányban) két érték változásával kell számolnunk:

1, Változik a kimeneti közös feszültség, az „erősítési” tényezőt A_k -val jelöljük

$$\Delta U_{kik} = \Delta U_{bek} A_k \quad (4)$$

2. Kellemetlenebb hatás, ha a bemeneti közös feszültség változása a kimeneti *szimmetrikus feszültség* változását is okozza, mert ez az érték a kimeneti jel, és az esetleges további fokozatokban ezt a hatást már nem tudjuk kiküszöbölni.:

$$\Delta U_{kisk}(s) = \Delta U_k(s) A_{sk}(s) \quad (5)$$

Az A_{sk} tényező indexelése arra utal, hogy a *kimeneti szimmetrikus jel* és a *bemeneti közös gerjesztés* között mérjük az arányossági tényezőt. A továbbiakban is ilyen jelöléseket használunk. Ha a két index megegyezik, csak egyszer szerepeltetjük.

(2) és (5) szerint tehát a kimeneti szimmetrikus feszültség változásának értéke függ mind a bemeneti szimmetrikus feszültség, mind pedig a bemeneti közös feszültség változásának értékétől:

$$\Delta U_{kis}(s) = \Delta U_{bes}(s) A_s(s) + \Delta U_{bek}(s) A_{sk}(s) \quad (6)$$

A_s és A_{sk} arányát E_{ku} -val jelöljük, ez a közös jel elnyomási tényező. Abszolút értékét CMRR-nek, ill. dB-ben kifejezett értékét CMR^{84} -nek is nevezzük. (Ez az elterjedt forma!)

Mivel az E_{ku} értéke

$$E_{ku}(s) = CMRR(s) = \frac{A_s(s)}{A_{sk}(s)} \quad (7) \mathcal{NB}$$

Ennek megfelelően:

$$\Delta U_{kis}(s) = A_s(s) \left[\Delta U_{bes}(s) + \frac{\Delta U_{bek}(s)}{E_{ku}(s)} \right] \quad (8) \mathcal{NB}$$

(30a)-hoz hasonlóan a kimeneti közös jel változására is felírható az alábbi egyenlet:

$$\Delta U_{kik}(s) = A_k(s) [\Delta U_{bek}(s)] + A_{ks}(s) [\Delta U_{bes}(s) A_{ks}(s)] \quad (9)$$

Ritkán használt tényező az E_{su} , amely arra utal, hogy a kimeneti közös feszültség érték változását mennyivel erősebben befolyásolja a bemeneti közös feszültség változása, (A_k) mint a bemeneti szimmetrikus meghajtás változása. (A_{ks})

$$E_{su}(s) = \frac{A_k(s)}{A_{ks}(s)} \quad (10)$$

Nagyon lényeges arányossági tényező az un. diszkriminációs tényező, $D_u(s)$.

$D_u(s)$ azt mutatja, hogy a szimmetrikus jel erősítését meghatározó $A_s(s)$ érték hogy aránylik a közös jel terjedését meghatározó $A_k(s)$ értékhez.

$$D_u(s) = \frac{A_s(s)}{A_k(s)} \quad (11)$$

Fentiek alapján a kimeneti közös feszültség értékére az alábbi egyenlet írható fel:

$$\Delta U_{kik}(s) = A_s(s) \frac{\Delta U_{bek}(s) + \Delta U_{bes}(s) / E_{su}(s)}{D_u(s)} \quad (12) \mathcal{NB}$$

Összegezve a (6) és (9) egyenleteket megkaphatjuk a szimmetrikus erősítők egyenlet-rendszerét:

$\Delta U_{kis}(s) = \Delta U_{bes}(s) A_s(s) + \Delta U_{bek}(s) A_{sk}(s)$	(6) \mathcal{NB}
$\Delta U_{kik}(s) = A_k(s) [\Delta U_{bek}(s)] + A_{ks}(s) [\Delta U_{bes}(s) A_{ks}(s)]$	(9) \mathcal{NB}

⁸⁴ CMRR — Comon Mode Rejection Ratio – Közös jel elnyomás aránya. CMR – Comon Mode Rejection: A kettőt ne keverjük össze! (Sajnos gyakran előfordul)

5-3. Aszimmetrikus kimenetű erősítő modellje, üresjárási átviteli függvénye

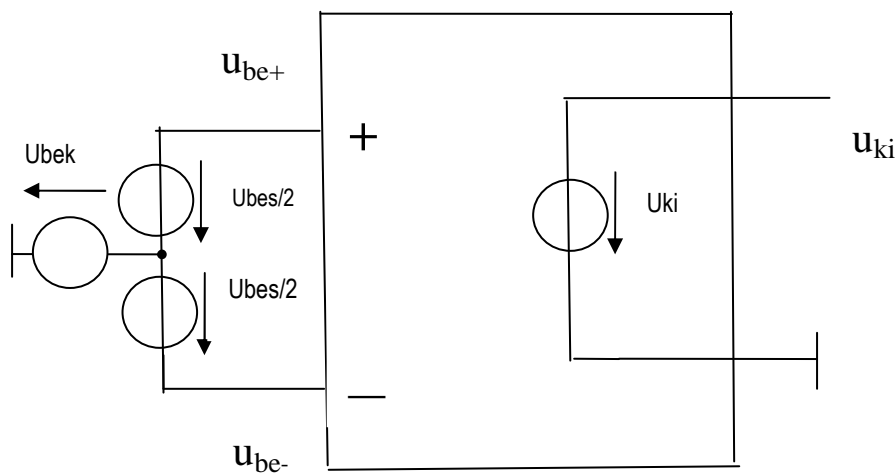
Az 5-3. ábra aszimmetrikus kimenetű erősítő feszültségmodelljét ábrázolja. Az erősítő modellje a kimeneti oldalon lényegesen egyszerűbbé válik; sem U_{kis} , sem U_{kik} nem definiálható. Hasonlóképpen nem definiálható A_k , D_u , és A_{ks} sem.

Az aszimmetrikus kimenetű erősítő esetében A_s értékét, mint a kimeneti feszültség változásának és a bemeneti szimmetrikus gerjesztés változásának hányadosát, A_{sk} értékét pedig hasonlóképpen a kimeneti feszültség változásának és a bemeneti közös gerjesztés változásának hányadosát definiáljuk. E_{ku} ebben az esetben A_s és A_{sk} hányadosa. Arra utal, hogy a kimeneti jel változása mennyivel „köszönhető” erősebben a bemeneti szimmetrikus gerjesztés változásának, mind a közös módusú gerjesztés változásának.

Aszimmetrikus kimenetű szimmetrikus erősítő esetén $0\text{ V } U_{bek}$ és $0\text{ V } U_{bes}$ mellett definiálható U_0 , a nyugalmi feszültség értéke.

A (8) egyenlet — ezúttal a kimenő feszültségre alkalmazva — érvényes aszimmetrikus kimenetű szimmetrikus erősítőkre is:

$$\Delta U_{ki}(s) = A_s(s) \left[\Delta U_{bes}(s) + \frac{\Delta U_{bek}(s)}{E_{ku}(s)} \right] \quad (13) \mathcal{NB}$$



5-3. ábra, Aszimmetrikus kimenetű szimmetrikus erősítő feszültségmodellje

5.4.. A szimmetrikus erősítők bemenő- és kimenő impedanciái

Láttuk, hogy a szimmetrikus erősítők bemeneti gerjesztése két különböző komponensre, szimmetrikus és közös gerjesztésre bontható (sőt: bontandó) fel, és hogy a kétféle gerjesztés erősítése különbözik

egymástól. A szimmetrikus erősítő tehát Janus-arcú⁸⁵, attól függően, hogy milyen vezérlést kap. Ez összefügg avval is, hogy a bemeneti impedancia is általában függ attól, hogy a szimmetrikus, vagy a közös vezérlésre vonatkoztatjuk.(5-4. ábra)

Az ábrán a zsúfoltság elkerülése végett a feszültséggenerátorokat már nem jelöltük be, azok megegyeznek a 3. ábrán látható elnevezésekkel. A „+” és a „-” bemeneteken befolyó áram értéke:

$$I_{be+} = I_k/2 + I_s \qquad I_{be-} = I_k/2 - I_s$$

Fentiekből levezethetők az I_s és I_k áramok értékei a bemeneti áramok függvényében:

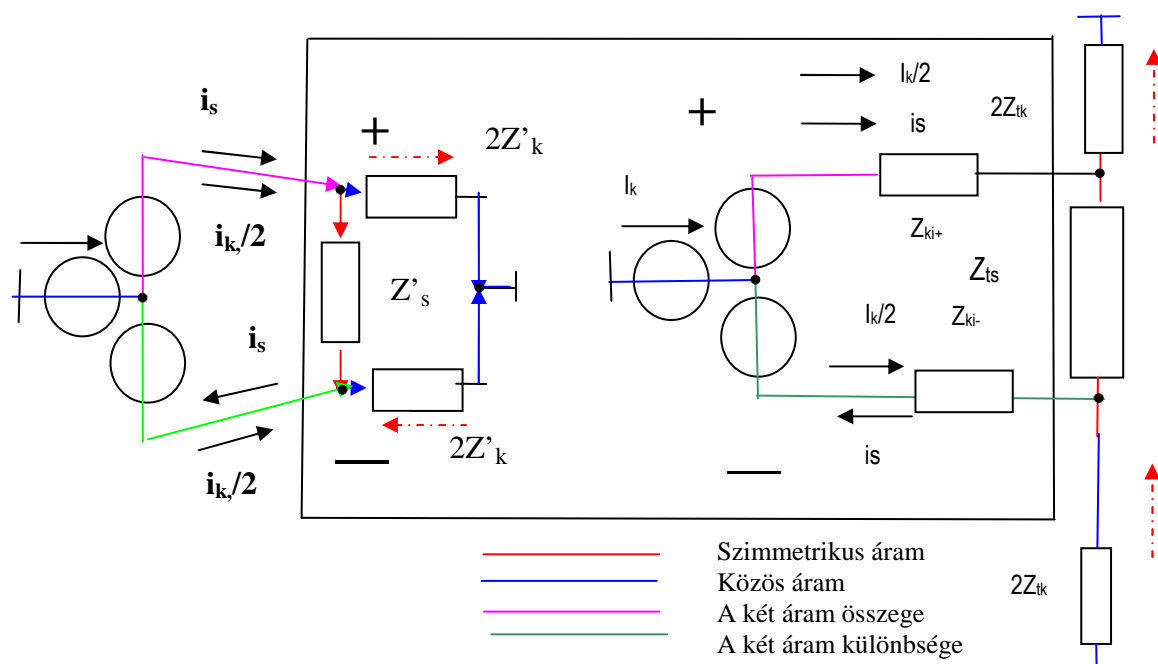
$$I_s = (I_{be+} - I_{be-})/2 \qquad I_k = I_{be+} + I_{be-} \qquad (14) \mathcal{NB}$$

Jól látható, hogy a közös gerjesztésre vonatkozó bemeneti impedancia Z_k (a két feszültség megegyezik, az áramok pedig összeadódnak), a szimmetrikus gerjesztés bemenő impedanciája pedig $4Z_k \times Z'_s$. (A Z'_s impedanciát a 2 „ $2Z_k$ ” impedancia soros eredője söntöli)

$$Z_k = Z'_k \qquad Z_s = \frac{Z'_s 4Z'_k}{Z'_s + 4Z'_k} \qquad (15)$$

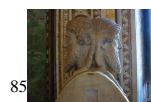
Mint látni fogjuk, $Z'_s \ll Z'_k$, így kis hibával elfogadható a $Z_s \approx Z'_s$ közelítés is.

(A kimenő impedancia szimmetrikus és aszimmetrikus kimenetek esetén is Z_{ki} .)



5-4. ábra

Szimmetrikus kimenetű szimmetrikus erősítő be- és kimeneti áramai
(A szaggatott piros nyilak gyenge additív szimmetrikus áram jelenlétére utalnak)



⁸⁵ A Janus-arc a mitológiából ismert, a kapuk, az ajtók, a kezdet és vég istene (január hó) a mai szóhasználatban a kétszínűség, elvileg megbízhatatlanság szimbóluma.

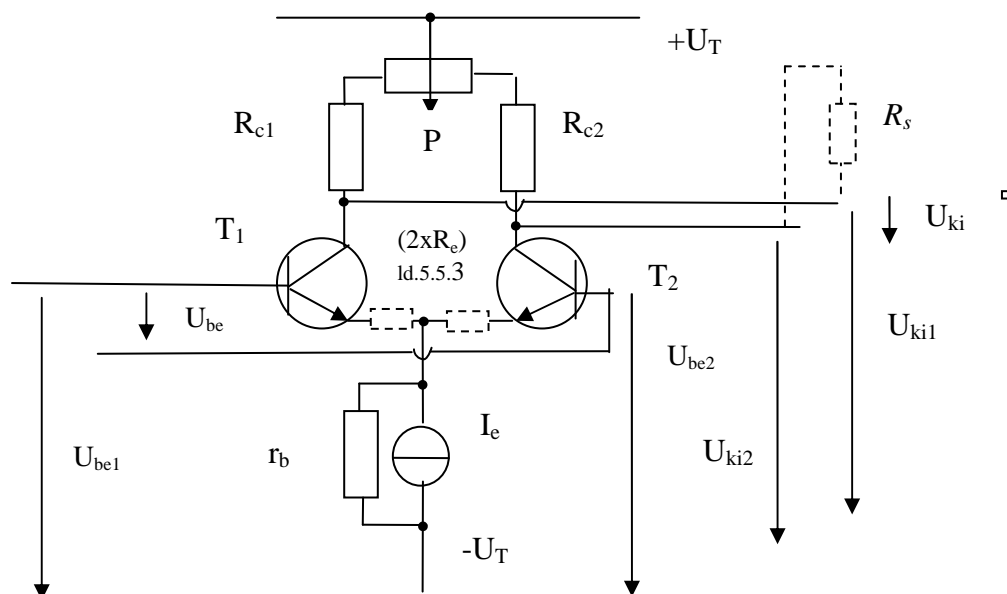
5.5. Differenciál erősítők⁸⁶

A differenciál-erősítők eredete valószínűleg még az elektroncső-korszakkal függ össze, a szimmetrizáló⁸⁷ fokozatok megjelenésével. Mind bipoláris, mind MOS tranzisztor alapú kapcsolások ismertek, s igen gyakori a kettő kombinációja is.

A kapcsolat a legegyszerűbb szimmetrikus erősítő, és a bonyolult, integrált kivitelű szimmetrikus erősítők standard bemeneti kapcsolása, így tárgyalása igen lényeges. A kapcsolási rajzot az 5-5. ábra mutatja.

Az 5-5. ábrából látható, hogy két CE kapcsolásról van szó, az emitterek azonban nincsenek földelve, hanem egymáshoz kapcsolódnak. Az emitteráramok összegét áramgenerátor biztosítja, melynek R_b belső ellenállása van. (Norton modell).

A kapcsolási rajzba egy „P” kiegyenlítő potenciométert is belerajzoltunk, az áramkör szimmetriájának beállítására. Az erősítő szimmetrikus bemeneti vezérlése (U_{be}) a két bemeneti vezérlés különbsége, a kimeneti szimmetrikus jel a két kimeneti jel különbsége, a közös jelekre és vezérlésekre is a már elmondottakat kell alkalmazni.



5-5. ábra. Differenciálerősítő alapkapsolása
(a szaggatottan jelölt ellenállások opcionálisak)

⁸⁶ Precízebben differencia-erősítők, mivel a bemeneti jel különbségét erősítik; az elnevezés azonban egy sor más hibás elnevezéshez hasonlóan annyira elterjedt, hogy mi is ezt a terminológiát fogjuk használni.

⁸⁷ A szimmetrizáló fokozatok egy aszimmetrikus bemeneti jeltől két, azonos amplitúdójú, és egyidejű terheléssel azonos módon csökkenő, de különböző irányba változó (harmonikus jel esetén ellenkező fázisú) jelet formálnak.

5.5.1. A differenciális erősítő lineáris (kisjelű) tulajdonságai

A szimmetrikus *üresjárati* erősítésre

$$A_s = \alpha R_c / r_e, \quad (16) \quad \mathcal{NB}$$

(Amennyiben a tranzistorok, vagy az R_c ellenállások különböznek, úgy a két összekapcsolt fokozatra külön-külön kiszámítjuk a (16) értékét, majd átlagoljuk. (Integrált kivitelű diff.ereősítő fokozatoknál erre nincs szükség)

a szimmetrikus kimenő impedancia értéke

$$r_{kis} = R_{c1} + R_{c2}. \quad (17)$$

A szimmetrikus bemenő impedancia értéke

$$r_{bes} = 2r'_e, \text{ azaz } 2(\beta + 1)r_e. \quad (18)$$

Közös vezérlés esetén a bemenetek vezérlése egyforma, az emittereket szét is kapcsolhatjuk, mindegyikre a meghajtó áram fele kerül, az emitterkört meghajtó áramgenerátor r_b belső ellenállásának kétszeresével együtt, soros áram-visszacsatolás jön létre, így a közös *üresjárati* erősítés:

$$A_k = \alpha R_c / (r_e + 2r_b) \text{ (ebben az esetben is átlagolni lehet)} \quad (19) \quad \mathcal{NB}$$

$$r_{kik} = (R_{c1} + R_{c2}) / 2 \quad (20a)$$

A közös bemenő impedancia értéke:

$$r_{bek} = (\beta + 1)(r'_e + 2r_b), \text{ ill. a két tranzisztorra vonatkozó impedancia átlaga.} \quad (21)$$

Végtelen R_s ellenállás, (Z_s impedancia), a tranzisztorok közel egyenlő paraméterei és egyenlő R_c értékek mellett az üresjárati D_u érték:

$$D_u \approx 2 r_b / r_e \quad (22)$$

ez az érték áramgenerátoros meghajtás esetén több tízezer is lehet.

Nagyon lényeges E_{ku} értéke, mert a kimeneti parazita szimmetrikus jelet többé nem lehet a rendszerből kiiktatni. Ez a tényező a két fokozat aszimmetriájára épül, és az érzékenységszámításhoz vezet el:

$$E_{ku} = D_u / \left(\frac{2\Delta\lambda}{0,5} + \frac{\Delta R_c}{R_c} + \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \right); \text{ ha } 1/R_s = 0, \text{ akkor}$$

$$E_{ku} \approx \frac{r_b}{r_e \left(2\Delta\lambda + \frac{\Delta R_c}{2R_c} + \frac{\Delta\alpha}{2\alpha} \right)} \quad \text{ahol} \quad (23)$$

λ – az un. árameloszlási tényező :

$$\lambda = \frac{I_{e1}}{I_{e1} + I_{e2}} = 0,5 + \Delta\lambda$$

Integrált kivitel esetén a tranzisztorok és a beépített munkaellenállások aszimmetriája alacsony. Diszkrét kivitel esetén az aszimmetriát a „P” kiegyenlítő potenciométer, és kettőstranzisztor alkalmazása javítja.

Egyszerűbb differenciál erősítők az emitterkörben nem áramgenerátor-kapcsolást, hanem egyszerű R_{EE} emitterellenállást tartalmaznak. Ebben az esetben r_b szerepét R_{EE} veszi át, de mivel R_{EE} értéke jóval kisebbre adódik, ezért ezek a kapcsolások rosszabb D_u értékkel, ennek következtében nagyobb A_k/A_s , s ami még rosszabb, nagyobb $A_{ks}/A_s (=1/CMRR)$ értékkel rendelkeznek.

5.5.2. Differenciál erősítők nagyjelű (nemlineáris) tulajdonságai

Ezeket a tulajdonságokat természetesen igen kis frekvenciákon, ill. egyenáramon elemezzük.

Feladatunk $U_{kis} = f(i_{bes})$ összefüggés levezetése.

A nemlineáris tulajdonságok összefüggenek azoknak a félvezetőknek a tulajdonságaival (transzkonduktancia-egyenletével), melyek az erősítőt képezik. Bipoláris tranzisztorok esetén kiindulásunk az

$$I_e = I_{CB0} \exp(U_{b-e}/\varphi_T) \quad (24)$$

összefüggés.

Egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy az emitterköri áramgenerátor belső ellenállása végtelen, azaz az áramgenerátor ideális, s a kollektorköri ellenállásokat, a tranzisztorok A és α árameloszlási tényezőjével és záróirányú I_{CB0} áramával együtt tekintsük teljesen egyformának. Legyen $U_{b1} = U_s/2$, $U_{b2} = -U_s/2$, azaz $U_k = 0$.

Ebben az esetben a bemeneti feszültségek változtatásakor a differenciálerősítő áramelosztóként működik, az emitteráramok összege const, I_{e0} .

A kimeneti jel a kimeneti kollektoráramok különbségével arányos, azaz

$$U_{kis} = -(I_{c1} - I_{c2}) R_c = -\Delta I_c \cdot R_c.$$

I_{c1} értékére felírhatjuk, hogy

$$I_{c1} = AI_{CB0} \exp \frac{U_{bes}/2 - U_e}{\varphi_T} = AI_{CB0} \frac{\exp U_{bes}/2\varphi_T}{\exp U_e/\varphi_T} \quad 88$$

hasonlóképpen írhatjuk fel I_{c2} értékét is:

$$I_{c2} = AI_{CB0} \exp \frac{-U_{brs}/2 - U_e}{\varphi_T} = AI_{CB0} \frac{\exp -U_{bes}/2\varphi_T}{\exp U_e/\varphi_T}$$

A két kollektoráram különbsége:

$$\Delta I_c = AI_{CB0} \frac{\exp U_{bes}/2\varphi_T - \exp -U_{bes}/2\varphi_T}{\exp U_e/\varphi_T}$$

Hasonló egyenlet írható fel a két emitteráram összegére, ami I_{e0} :

$$I_{e0} = I_{CB0} \frac{\exp U_{bes}/2\varphi_T + \exp -U_{bes}/2\varphi_T}{\exp U_e/\varphi_T};$$

Érdeemes az utóbbi két egyenlet mindkét oldalát elosztani egymással, majd az eredményt megszorozni I_{e0} értékkel:

$$\Delta I_c = I_{e0} \frac{\exp U_{bes}/2\varphi_T - \exp -U_{bes}/2\varphi_T}{\exp U_{bee}/2\varphi_T + \exp -U_{bes}/2\varphi_T} = I_{e0} th \frac{U_{bes}}{\varphi_T}$$

A kimeneti szimmetrikus feszültség:

$$U_{kisc} = -I_{e0} R_c th \frac{U_{bes}}{\varphi_T} \quad (25) \quad \mathcal{NB}$$

Fentiek alapján látható, hogy a bipoláris tranzisztor-alapú differenciálerősítő szimmetrikus kimeneti jele a bemeneti jellel a th (hiperbolikus tangens) függvény szerint függ össze. (5-6. ábra)

A $th x$ függvény Maclaurin⁸⁹ sorba-fejtése nem túl egyszerű folyamat, az eredmény az alábbi:

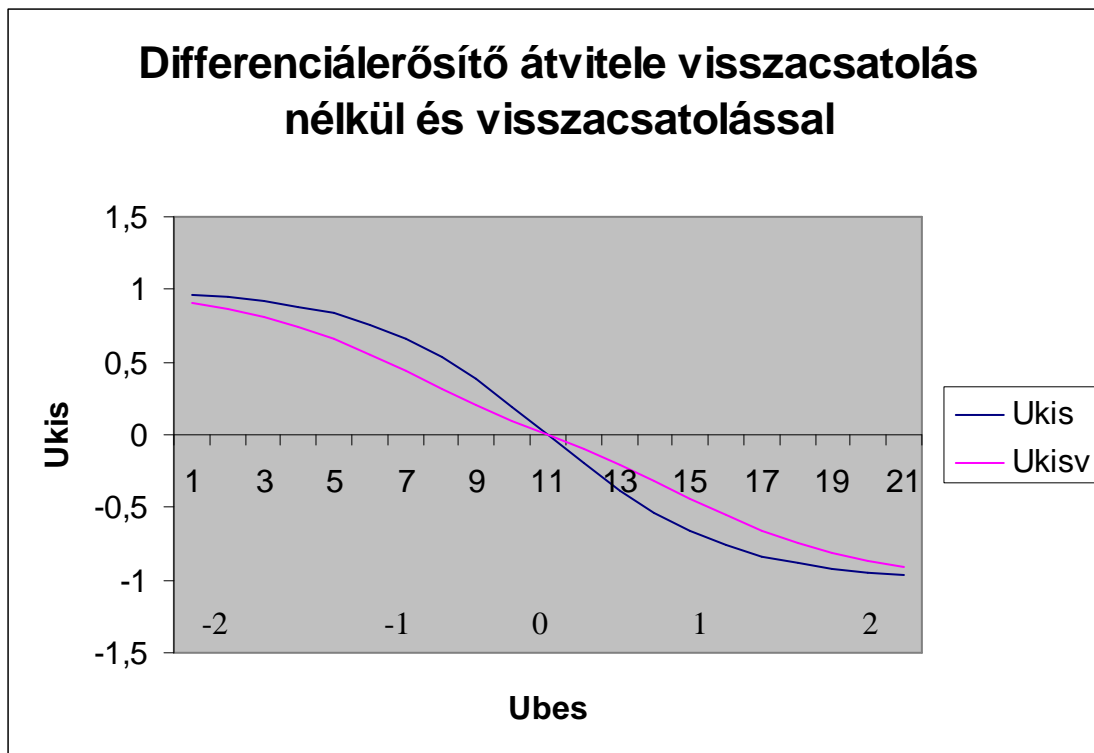
$$thx = x - 1/3x^3 + (2/15)x^5 \dots$$

⁸⁸ Természetesen valamennyien emlékezünk még a termikus potenciál meghatározására és értékére,

$$\varphi_T = \frac{kT_0}{q} = kb.26 \text{ mV} \quad (k\text{—Boltzmann-féle állandó, } T_0\text{—hőmérséklet, K; } q\text{— az elektron elemi töltése.)}$$

⁸⁹ Colin Maclaurin (1668, Kilmodan — 1746, Edinburgh) skót matematikus.

10 %-ot meg nem haladó THD faktor (81. oldal) feltétele fentiek alapján $x \leq 0,5$, azaz a bemeneti szimmetrikus vezérlés értéke fenti követelmény teljesítéséhez nem haladhatja meg a φ_T érték felét, (kb. 13 mV)



5-6. ábra. Differenciál-erősítő nagyjelű átvitele

5.5.3. Visszacsatolás differenciálerősítőknél

Az 5.5. ábrán (113. oldal) szaggatottan jelölt járulékos emitterellenállások a fokozat belső soros áram-visszacsatolását hozzák létre. Az R_e ellenállások valójában „hozzáadódnak a tranzisztor r_e ellenállásához lényegesen csökkentik a tranzisztorok FE erősítésének a szórását, jelentősen javítva a rendszer szimmetriáját, (csökkentve $\Delta\lambda$ értéket) mind statikus, mind dinamikus szempontból. Alkalmazásuk egyenesen elkerülhetetlen, ha a bemeneti differenciális vezérlés meghaladja az 5.5.2. pontban levezetett 13 mV körüli értéket.

A max. kivezérlés értéke R_E ellenállások beiktatása esetén:

$$U_{be\max}' = U_{be\max} \gamma, \quad \gamma = \frac{R_e + r_e}{r_e} \quad (25a)$$

(Természetesen „ γ ” értékkel csökken a differenciálerősítés, és a D_U értéke is, a CMRR érték azonban lényegesen nem változik).

Az erősítő átvitelét visszacsatolással és visszacsatolás nélkül az 5-6. ábra mutatja.

5..6. Műveleti erősítők

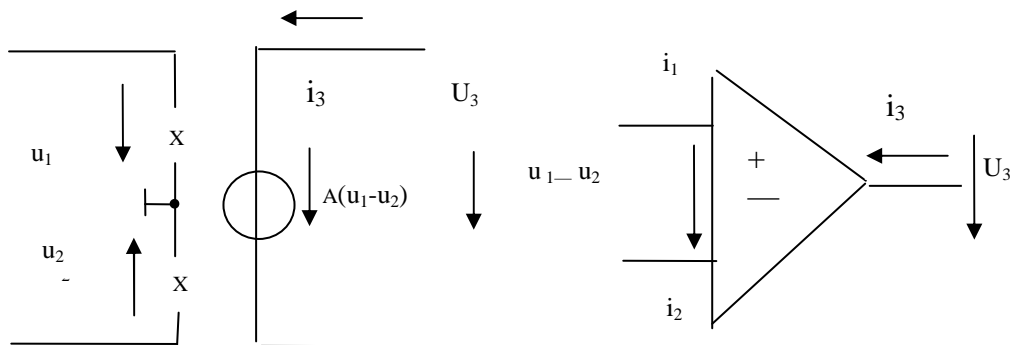
A műveleti erősítők (Operational Amplifier, OPA)—az analóg áramköri technika egyik leggyakrabban használt alapelemei: szimmetrikus, általában aszimmetrikus kimenetű, integrált áramkör formájában elérhető szimmetrikus erősítők, melyek a 2. fejezet 2.2. pontjában tárgyalt „ideális műveleti erősítő” tényleges megjelenési formái.

A műveleti erősítők esetében a kimenet „0 V” értékének a bemeneti közös vezérlés „0 V” értéke, a bemeneti szimmetrikus vezérlésnek pedig a „0 V”-tól csak kis mértékben, a technológiai eljárások során elkerülhetetlen aszimmetria következtében létrejövő hibafeszültség— elterjedt elnevezése *offset*⁹⁰— értéke felel meg.

A műveleti erősítők DC erősítők. Alapkövetelmény a nagy szimmetrikus bemenő-és kis kimenő impedancia, ($M\Omega$, ill. Ω tört értéke) és a nagy üresjárású szimmetrikus erősítés (10^6 nagyságrend) Ezek az erősítők megfelelő passzív hálózatba építve analóg algebrai műveletek (összeadás, kivonás, bonyolultabb esetekben szorzás, osztás, logaritmus-képzés, exponenciális műveletek) elvégzésére alkalmasak, ebből ered elnevezésük.

Fentiek alapján a műveleti erősítő átviteli függvényei az offset értékeket elhanyagolva az aszimmetrikus kimenetű szimmetrikus erősítőkénél egyszerűbbek:

$$U_{ki}(s) = A_s(s) \left[U_{be_s}(s) + \frac{U_{bek}(s)}{CMRR(s)} \right] \quad (26) \mathcal{NB}$$



5.7. ábra (II: fejezet, 2-3. ábra).

Ideális műveleti erősítő helyettesítő képe (jobb oldal) és jelölése

A műveleti erősítők jelölését az 5-7. ábra szemlélteti. Többnyire aszimmetrikus kivitelűek, de találkozhatunk szimmetrikus kivittel is. Diszkrét kivittel is megépíthetőek, de a pontos DC

⁹⁰ ld. 6.6.1.pont

előírások miatt épeszű ember nem teszi ezt, a kereskedelemben viszont elég olcsó áron a digitális TTL áramkörökhöz hasonlóan hatalmas választékban, több alapvető osztályban szerezhető be. Megkísérlünk az alábbiakban valamiféle osztályozást adni.

a, „klasszikus” műveleti erősítők,

- 1 Általános célú erősítők (GP OPA)
2. Nagyfeszültségű, nagyáramú erősítők (teljesítményerősítők) (High Voltage-high current OPA)
3. Feszültség-komparátorok
- 4.. Nagyfrekvenciás erősítők (HF OPA)

b, műveleti erősítő-kombinációk, speciális tulajdonságú műveleti erősítők

5. Precíziós (műszer-) erősítők (instrumental amplifier-INA)⁹¹
6. Galvanikusan leválasztott erősítők (insulated amplifier)
7. Nemlineáris átviteli görbájú erősítők, stb.

Az általános célú erősítők (GP OPA) a család legelterjedtebb osztályát alkotják. Több, eszköz kombinációjával bonyolult áramkörök hozhatók létre, jelenleg elsősorban programozható áramkörök (FPGA) útján, melyek „cellakészlete” digitális SSI és MSI áramkörökön kívül GP OPA-kat, tranzisztorokat, újabban más, bonyolultabb hibrid (digitális-analóg) áramköröket is tartalmaznak. Amennyiben OPA-t erősítőnek használunk, úgy kötelező a negatív visszacsatolás használata.(6.7.pont)

A nagyfeszültségű, nagy kimeneti áramú és nagy kimenő teljesítményt biztosító erősítők ± 100 V tápfeszültség, ill. közös bemeneti feszültségek fogadására, ugyanakkora kimeneti jel leadására alkalmasak. A nagyáramú eszközök belső áramkorlátozás nélkül több A, a nagyteljesítményű eszközök több W kimenő teljesítmény leadására alkalmasak.

A komparátorok (feszültség-komparátorok) nagy slew-rate -értékkel (5. fejezet) rendelkező műveleti erősítők, melyeket visszacsatolás nélkül, elsősorban jelformáló („négyzögesítő”) áramkörökben alkalmaznak. A komparátor-áramkörök és pozitív visszacsatolást megvalósító külső elemek segítségével ún. hiszterézises komparátorok alakíthatók ki. (ld. laboratóriumi segédlet).

A HF műveleti erősítők többsége buffer (leválasztó)-erősítő, blokkvázlatuk a szokásostól eltérő, a feszültségerősítés 0 dB körüli, viszont a kisjelű sáv szélesség több ezer MHz, a kúszási érték (slew-rate) nagyságrendje is több V/nsec.

⁹¹ A műszererősítő általában 3 OPA kombinációja. Részletesen: „Adatgyűjtő rendszerek...” c. tárgy keretein belül.

Az egyéb műveleti erősítők már nem egyszerű műveleti erősítők, hanem kombinációk, melyek műveleti erősítőket, külső csatoló- és visszacsatoló hálózatokat, s egyéb, még nem tárgyalt áramköröket is tartalmaznak.

A műveleti erősítők gyakran képezik építőkövét valamilyen bonyolult „dedikált”, azaz adott funkciót megvalósító analóg, vagy hibrid (Analóg/digitális) IC-nek, (jelen jegyzet II: kötete). A modern programozható analóg vagy hibrid IC-k általában több műveleti erősítőt is tartalmazhatnak. Gyakran maguk a műveleti erősítők is tartalmaznak visszacsatoló áramköröket, egyes fokozatokon belül, vagy több fokozatot is átölelő hálózattal.

5.6.1. A műveleti erősítők jellemző paraméterei: $A(s)$, határfrekvencia, slew-rate, offset

Az un. *általános célú* műveleti erősítők egyik legfontosabb paramétere a terheletlen kimenetű (szimmetrikus) feszültségerősítés, $A(s)$. Általános egyenlete:

$$A(s) = \frac{A_0}{(1 + s/\omega_1)(1 + s/\omega_2)} \quad (26) \quad \mathcal{NB}$$

azaz az amplitúdó-átviteli függvénynek két töréspontja van, a fázis-átviteli függvény pedig $s(j\omega)$ igen nagy értékei mellett közel π , azaz 180 fokos késést mutat, a rendszer „végtelen sávszélességű” erősítő és kettes fokszámú, a σ tengelyen elhelyezkedő póluspárral jellemezhető aluláteresztő szűrő kombinációjával modellezhető. (5.8. ábra)

Az A_0 , azaz az egyenáramú erősítési tényező értéke általános célú OPA esetén százezres, esetleg milliós nagyságrendű. Az ilyen OPA-k esetén $f_1 = \omega_1/2\pi$ értéke tíz és száz Hz közé esik, f_2 értéke 1-10 MHz között mozog.

Bár két törésponttal, azaz két valós pólussal rendelkeznek, a műveleti erősítőknél is definiálható a GB faktor, azaz a jósági tényező. A jósági tényező ebben az esetben az egyenáramú erősítés A_0 és f_1 szorzata. Visszacsatolt műveleti erősítőknél már némileg más a helyzet, (5.10.3.3.)

Aszimmetrikus kimenetű OPA-k *CMR értéke* DC-n 120 dB körül mozog. Ez az érték is frekvenciafüggő, a töréspontja néhány száz Hz nagyságrendű, a csökkenés mértéke kb. 6dB / oktáv.⁹²

A „slew-rate”, azaz a kúszási sebesség fogalmáról már beszéltünk, mint a visszacsatolt erősítők speciális torzításáról. Fontos tudni, hogy a műveleti erősítők már önmagukban is igen sok fokozatból állanak, amelyek egy része visszacsatolt, így a slew-rate értékkel már a

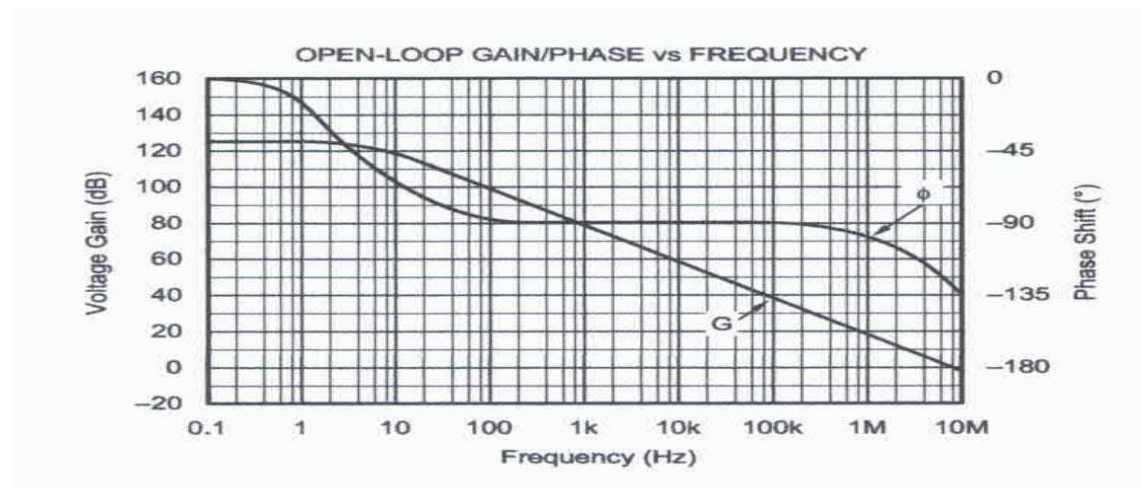
⁹² A „6dB/oktáv” természetesen megegyezik a „20dB/dekád” iránytangens-értékkel.

látszólag visszacsatolatlan műveleti erősítőknél is találkozunk. Előrebocsátjuk, hogy ha az erősítőt valamilyen külső hálózattal visszacsatoljuk, úgy sok paramétere javítható, a *slew-rate* érték azonban nem..

A műveleti erősítők a „0V” nyugalmi feszültségérték előírása következtében a szimmetrikus erősítőkre jellemző paramétereken kívül még egy jellemző paraméterrel, az un. *teljes feszültség-offset* (bemeneti szimmetrikus eltolási hiba) paraméterével rendelkeznek.

A *teljes feszültség-offset* definíciójához a *feszültségoffset* definícióján keresztül juthatunk el.

0 V U_s és U_k mellett az erősítő kimeneti feszültsége (U_{ki}) nem 0V, ezt az értéket 0V U_k mellett valamilyen $U_s = U_{OFF}$ bemeneti jel mellett éri el. Modern erősítők esetében ez az érték 1-2 mV-nál nem nagyobb. Ha ezt az értéket U_s -nek tekintve 0V U_k mellett a bemenetre vezéreljük ($U_{be+} = U_{off}/2$, $U_{be-} = -U_{off}/2$), a kimeneti feszültség értéke pontosan 0 V lesz.



5-8. ábra.

Általános célú műveleti erősítő átviteli függvényei

f_1 értéke kb. 4 Hz, f_2 értéke kb.10 MHz (ezen a frekvencián a fázistolás értéke -45 fok, ill. -135 fok.) Az egyenáramú feszültségerősítés értéke 125 dB, azaz kb. $1,78 \cdot 10^6$

Amennyiben az erősítő bemeneti fokozata bipoláris tranzistorokból áll, úgy a meghajtó fokozat terheletlen kimenő feszültsége(i) által beállítandó hibafeszültség értékét még két tényező befolyásolja, ha a bemenet(ek)et meghajtó fokozat kimenő impedanciája (impedanciái) értéke nem 0Ω .

Az erősítő bemeneti árama módosítja azt az un. *teljes* offsetfeszültség-értéket, amit az erősítő bemenetére ellenállásokon keresztül adnunk kell 0 V kimeneti jel generálásához (5-8. ábra)

Az 5-9. ábra jelölései szerint a teljes feszültség-offset egyenlete:

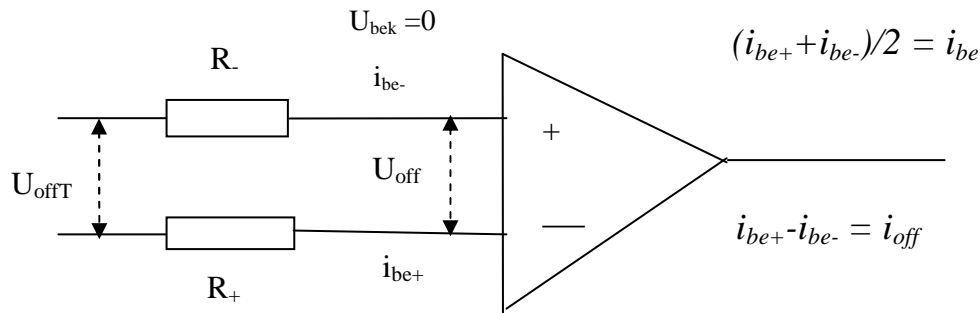
$$U_{OFFT} = U_{OFF} + i_{be} \Delta R + R i_{OFF}, \quad (27) \text{ NB}$$

ahol $R = (R_+ + R_-)/2$, $\Delta R = R_+ - R_-$.

A (27) egyenlet jobboldalának utolsó 2 tagját *járolékos offsetnek* nevezzük. ($R=0$, vagy $i_{be1}=i_{be2}=0$ esetben értéke 0)

Korszerű bipoláris bemenetű műveleti erősítők esetén:

$U_{OFF} \sim 1-3 \text{ mV}$, $I_b \sim 1-5 \text{ nA}$, $I_{OFF} \sim 1-2 \text{ nA}$



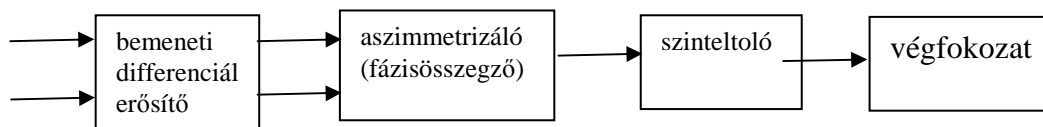
5-9. ábra. Teljes feszültség-offset, (U_{offT}), feszültség-offset (U_{off}) és áramoffset (i_{off})

Igen gyakori a FET bemenetű OPA, (a zajok tárgyalásánál még visszatérünk erre), ebben az esetben a bemeneti áramok pA nagyságrendűek, így a szokásos meghajtó impedanciák mellett a járulékos offsetet nem kell figyelembe vennünk, csak a feszültség-offsettel kell számolnunk.

5.6.2. A műveleti erősítők felépítése

A műveleti erősítő erősen egyszerűsített szerkezeti vázlatát az 5-10. ábra mutatja.

A műveleti erősítők belső felépítése igen változatos. Vannak közöttük egészen unikális, meglepő felépítésű eszközök, mi az általános célú eszközökkel tudunk csak foglalkozni.



5-10. ábra. GP műveleti erősítő felépítése

Az 5.10. ábra szerint Ezek az eszközök — nagy lélegzetet véve — tulajdonképpen négy alapvető blokkal rendelkeznek:

- Szimmetrikus be- és kimeneti fokozat;
- Aszimmetrizáló fokozat;
- Szinteltoló fokozat;
- Végfokozat

Mindegyik fokozatról érdemes kissé alaposabban beszélni.

5.6.2.1.. Bemeneti fokozat

Az eszközök túlnyomó többségében ez klasszikus bipoláris-vagy MOS –tranzisztorokkal felépített differenciálerősítő, az emitter (source) körben áramgenerátoros táplálással, belső áram-visszacsatolással, vagy anélkül, összekapcsolt CE, vagy kaszkód alapelemekkel.

(A tranzisztorok aszimmetriájának csökkentésére gyakran alkalmaznak belső áram-visszacsatolást. (5-5. ábra)

Az ábrán látható bemeneti fokozat az ismert kapcsolástól csupán annyiban különbözik, hogy a két emittert nem közvetlenül, hanem csatoló-ellenállásokon keresztül kötöttük össze. Az üresjáratú szimmetrikus erősítés természetesen csökken:

$$A_s = \alpha R_c / (r_e + R_e),$$

Az 5.5. ábrán (113, oldal) látható járulékos R_e ellenállások az 5.5.3. pontban már leírtakon túl jelentősen csökkentik a műveleti erősítő járulékos offset értékeit (bipoláris tranzisztorok alkalmazása esetén csökken az áramoffset, és csökkenek a bemeneti áramértékek is).

A bemeneti differenciálerősítőt a visszahatások csökkentése érdekében gyakran nem két CE, hanem két npn-kaszkód fokozat összekapcsolásával realizáljuk. (5-11. ábra, 124. old.)

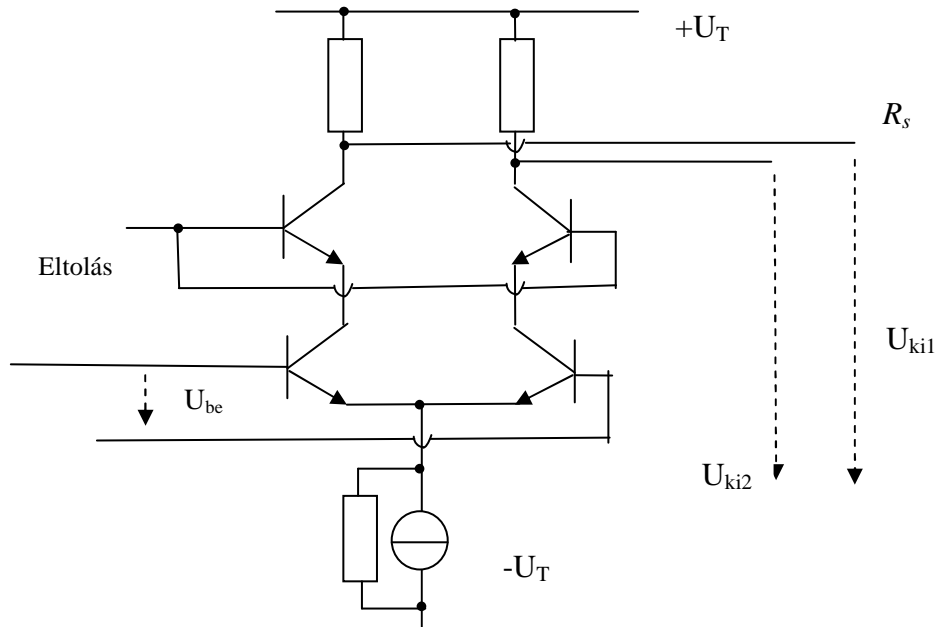
A bemeneti tranzisztorpár az áramoffset és a bemeneti áramok, a nemlineáris torzítások csökkentése érdekében gyakran MOSFET kivitelű, a kaszkód kapcsolás kimeneti eleme azonban általában bipoláris.

5.6.2.2.. Asszimmetrizáló fokozat

A legtöbb műveleti erősítő kimenet aszimmetrikus, így a bemeneti szimmetrikus erősítő jelét aszimmetrikussá kell átalakítani, azaz a bemeneti fokozat két kimeneti pontja közötti szimmetrikus jelet a referenciaponthoz („föld”) képest jelentkező jellé kell átalakítani.

Ennek legegyszerűbb módja egy olyan differenciál erősítő, amelynek csak az egyik kimenetét vezetjük tovább.

Ez a módszer nem terjedt el, mert egyrészt az erősítés felére esik vissza (ez a kisebb baj) másrészt viszont az első fokozat közös jele az aszimmetrizáló fokozat A_k értékével „felerősítve” kimeneti jellé válhat. Igen nagy probléma a „0” DC kimenet biztosítása is egyforma bemeneti vezérlések mellett.



5-11. ábra.

Integrált műveleti erősítő bemeneti fokozata, kaszkód differenciál-erősítővel

Az elterjedtebb rendszernél ennek a második differenciálerősítőnek a kimenetén áramkivonást hajtunk végre (Egyszerűbb esetben ez a két fokozat összevonható). Ennek a kivitelezésére ún. áramtükrös (current mirror) kapcsolás szolgál.

A differenciálerősítő szimmetrikus terheletlen kimeneti jele: (

$$U_{kis} = \Delta I_{ki1} R_{c1} - \Delta I_{ki2} R_{c2} \quad (28)$$

Amennyiben az R_c értéke egyenlő, úgy

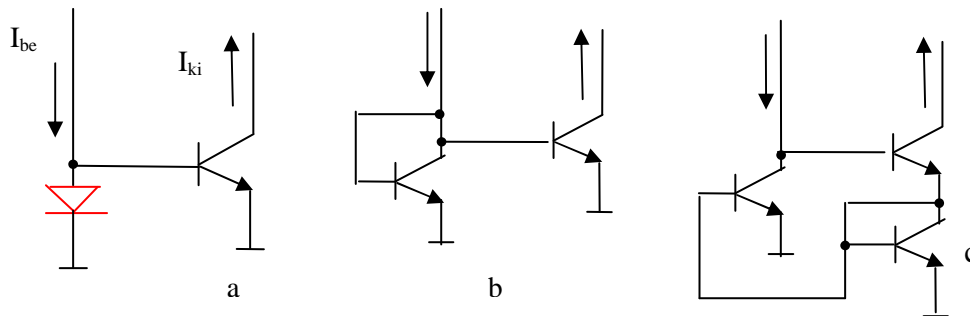
$$U_{kis} = (\Delta I_{ki1} - \Delta I_{ki2}) R_{c2} \quad (29)$$

ezért a jel aszimmetrikussá tehető, ha a kimeneten valamilyen közös ellenálláson a két áram különbségével arányos áramot vezetünk át.

Az áramtükrös különböző megvalósítása az 5-12. ábrán látható

Az a, ábrán látható, hogy a bemeneti áram a „diódán” nyitóirányú feszültségesést hoz létre, amely egy tranzisztor b-e feszültségét adja. Ha a dióda U/I és a tranzisztor transzfer karakterisztikái azonosak, akkor a két áramnak teljesen egyformának kell lennie, az egyenáramú árameloszlási tényező $A = I_c/I_e$ értékét 1-nek tekintve. Ha ez a tényező kisebb,

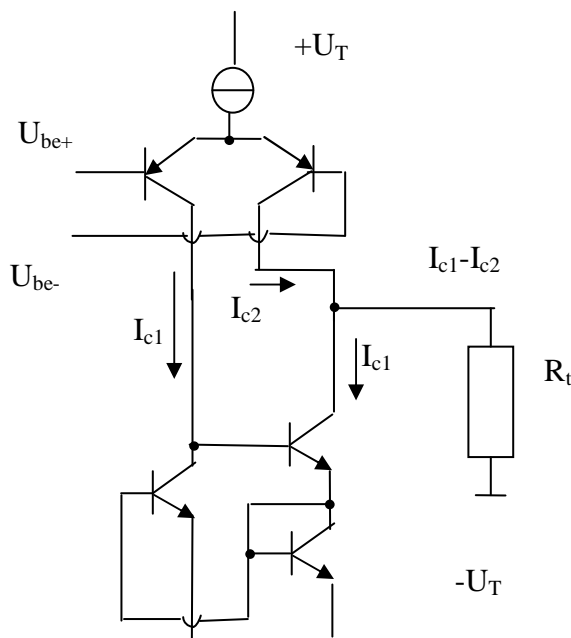
mint 1 (, ami valószínű), akkor a diódán átfolyó áram elvileg a tranzisztor emitteráramával egyezhetne meg, azaz a kimenő kollektoráram a bemenő áram A^2 -szerese. A b, ábra a technológiai megvalósításra utal integrált áramkörökben (diszkrét kapcsolás esetén nem is szoktuk az áramkört alkalmazni), a c ábrán szereplő áramkör egy javított megoldást mutat, ami egyforma három tranzisztor esetén az a, kapcsolás hibájától mentes.



5-12. ábra. Áramtükör

a, működési elv; b, egyszerű áramtükör megvalósítása; c, javított áramtükör

Az 5-12. ábra c, kapcsolása egy p-n-p tranzisztoros differenciálerősítővel kombinálva asszimmetrizáló fokozatot ad. (5-13. ábra,)



5-13. ábra.
Asszimmetrizáló
fokozat
differenciál-erősítő
áramtükörös
áramösszegzővel

5.6.2.5. Végfokozatok

A műveleti erősítők végfokozata AB osztályú ellenütemű végfokozat. Kapcsolástechnikailag nemcsak CC kapcsolással találkozunk. Előbbi esetében is sokszínű megoldások jöhetnek szóba. A nagyteljesítményű végfokozatoknál gyakran használatos az ún. Darlington-kombináció. Amennyiben nagyteljesítményű integrálható p-n-p tranzisztor nem áll rendelkezésre, az n-p-n Darlington „párja” a p-n-p / n-p-n „kompozit” kapcsolás: (5-16. ábra)



5-16. ábra.
Darlington- (a) és kompozit (b)
kombináció

A Darlington-kombináció egy olyan p-n-p tranzisztorral ekvivalens, amely kimeneti emitterárama a bemeneti bázisáram $4(B_1+1)(B_2+1)$ szerese⁹³, azaz

$$B_{eqDar} = B_1 + B_2 + B_1 B_2 \quad (30)$$

A kompozit fokozat is a bemeneti tranzisztor polaritás-rendszerét képviseli. A kimeneti „emitteráram” mértéke a bemeneti bázisáram

$1 + (B_1 B_2) + B_1$ -szerese, azaz

$$B_{eqkomp} = B_1 + (B_1 B_2) \quad (31)$$

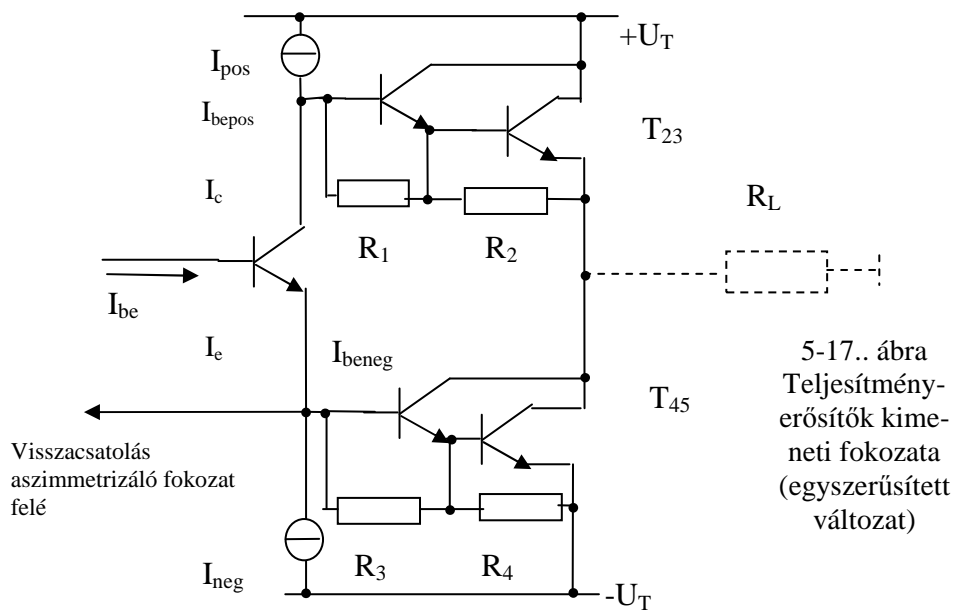
azaz valamivel kisebb, mint előző esetben, viszont a kimeneti tranzisztor n-p-n polaritású. Ezt a kapcsolást modern erősítőkben már nem használják.

Az 5-17. ábra bemutatja a teljesítményerősítőknél használt szimmetrizáló-CC-CE „áramgenerátoros”, azaz nagyimpedanciás végfokot.:

Ez a végfokozat döntően annyiban különbözik a komplementer CC kivitelétől, hogy — minden látszat ellenére is — önmagában, külső visszacsatoló hálózat (feszültség-visszacsatolás) nélkül nagyimpedanciás kimenetű. Bár az ilyen kimeneti kapcsolásnál is a visszacsatolás nélküli erősítést definiálnak a gyártók, de megadják a terhelő ellenállást (pl. $R_L = 8 \Omega$). A Darlington

⁹³ „B” alatt ebben az esetben az adott tranzisztor 1- bemenet, 2 – kimenet) egyenáramú CE áramerősítési tényezőjét értjük. Váltakozóáramú gerjesztés esetén „B” helyébe „ β ” lép.

végfokokat áramgenerátor látja el. A kapcsolás elég széles körben elterjedt a MOSFET—n-p-n technológiára épülő nagyteljesítményű erősítők körében. (TI, BB)



5-17.. ábra
Teljesítmény-
erősítők kimeneti fokozata
(egyszerűsített változat)

5.7. Visszacsatolt műveleti erősítők

Műveleti erősítőt visszacsatolás nélkül erősítő funkcióban nem alkalmazunk, az erősítés túl nagy, hatalmas a szórása, a hőmérsékleti függése, esetenként nagy a kimenő impedancia, a sávszélesség botrányosan kicsi.

A visszacsatoló rendszer, azaz a visszacsatolás módjának megválasztása elsősorban a kialakítandó funkciótól függ. Legegyszerűbbek az aszimmetrikus-erősítő funkciók., azaz azok a megoldások, melyek a szimmetrikus az erősítóből visszacsatolt aszimmetrikus erősítőt hoznak létre.

5.7.1. Visszacsatolt műveleti erősítők alapkapsolásai. Aszimmetrikus bemenetű alapkapsolások

A IV. fejezet 4.7. pontjában található , a visszacsatolásra, a visszacsatolás alpmódozataira, a visszacsatolt erősítésre vonatkozó megállapítások kis különbséggel alkalmazhatók szimmetrikus erősítőkre, így műveleti erősítőkre is.

Míg azonban aszimmetrikus erősítőknél a visszacsatolatlan erősítés egyenáramú értéke A_0 lehet pozitív, vagy negatív előjelű, (attól függően, hogy az erősítő „invertáló”, vagy

„neminvertáló” jellegű, a szimmetrikus erősítőknél A_0 értéke minden esetben pozitív. Ugyanazt az erősítőt aszimmetrikus erősítőnek bekötve a „+” bemenetről gerjesztve neminvertáló, a „-” bemenetről viszont „invertáló” erősítőt kapunk, és ez lényeges különbség a „dedikált” aszimmetrikus erősítőkhöz képest.

Ennek megfelelően módosulhatnak a IV. fejezet (13) és (15. egyenletei)⁹⁴

Kis kimenő impedancia biztosítására általában a feszültség-visszacsatolás két alapformája terjedt el:

a, Soros feszültség-visszacsatolás (Un. nem-invertáló alapkapsolás). A visszacsatoló rendszer bemenete az erősítő kimenete, kimenete pedig az erősítő negatív bemenete. Mivel az erősítő kimeneti jele a két bemenet közötti különbséggel arányos, így — eltérően a bipoláris tranzistoros erősítők emitterkörébe beiktatott ellenállásával létrejött negatív visszacsatolástól— ez valóban korrekt soros visszacsatolás, és amennyiben a visszacsatoló hálózat fázistolása kis frekvenciákon nulla — kis frekvenciákon, és egyenáramon ez valóban negatív visszacsatolás.

Legegyszerűbb kivitele az 5-18. ábrán látható egyszerű ellenállás-feszültségosztó, amely a visszacsatolás mélységét állítja be.

A IV. fejezet 13. egyenlete szerint abban az esetben, ha az erősítő tényleges bemeneti gerjesztése az eredeti gerjesztés, és a visszacsatoló hálózat kimeneti feszültségének különbsége, a (32) egyenlet fejezi ki a visszacsatolt erősítő átviteli függvényét:

$$A_v(s) = \frac{A(s)}{1 + H(s)} \quad (32)$$

Ezt az egyenletet még előjelre ellenőriznünk kell, az 5.7.1. pont bevezetőjében leírtak alapján. Mivel azonban jelmemeneként az erősítő „+” bemenetét használjuk, így a pozitív előjelet nem kell megváltoztatnunk.

„B” értéke ($R_1/R_v + R_1$ értékkel egyenlő, így a visszacsatolt erősítés a IV. fejezet (14) szerint:

$$A_v(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)B(s)} = \frac{A(s)}{1 + A(s)R_1/R_1 + R_v} \quad (32)$$

Áttérve a képzetes körfrekvenciára

$$\bar{A}_v(j\omega) = \frac{\bar{A}(j\omega)}{1 + \bar{H}(j\omega)} = \frac{\bar{A}(j\omega)}{1 + \frac{\bar{A}(j\omega)R_1}{R_1 + R_v}} \quad (33)$$

Nagy abszolút értékű H értékek mellett $|H| \gg 1$, s a mindenki által ismert egyenletet kapjuk:

⁹⁴ Áram-visszacsatolással helyszúke miatt nem foglalkozunk.

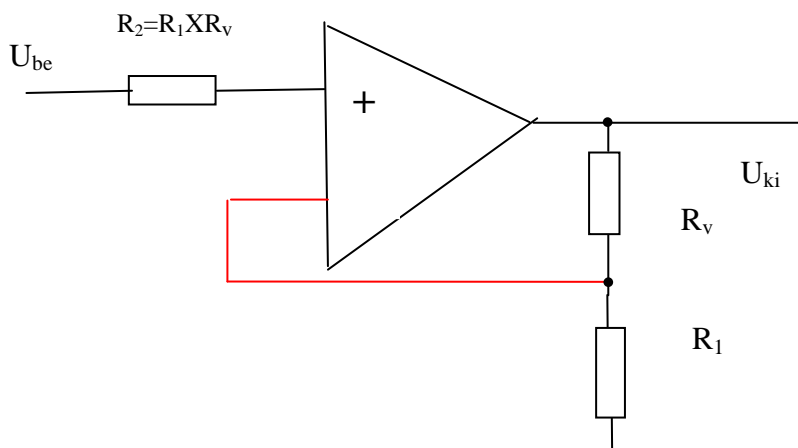
$$\bar{A}_v(j\omega) = A_v(0) = 1 + \frac{R_v}{R_1} \quad (34) \text{ NB}$$

Fenti egyenlet azt sugallja, hogy a visszacsatolt rendszer teljesen lineáris (ha az ellenállások azok), és az erősítés sávzélessége elvileg végtelen. (H abszolút értéke, azaz $|H(j\omega)|$ viszont ω értékének növelése mellett csökken, így feltételezésünk nem teljesül, azaz az ebből levont következtetésünk is hamis.

A kapcsolás bemeneti impedanciája igen nagy, bár a pozitív bemeneten a közös és a szimmetrikus áramok ezúttal összegződnek, viszont az impedancia az $(1 + \bar{H}(j\omega))$ értékkel beszorzódik:

$$Z_v(j\omega) = [2Z_k(j\omega) \times Z_s(j\omega)] [(1 + \bar{H}(j\omega))] \quad (35)$$

(Az egyenlet egyszerűsítése érdekében a két ellenállás párhuzamos eredőjét „x” jellel jelöltük.)



5-18. ábra

Műveleti erősítő soros feszültség-visszacsatolásával létrehozott aszimmetrikus erősítő („nem invertáló” kapcsolás; R_2 ellenállás beiktatására a járulékos offset minimalizálása céljából van szükség)

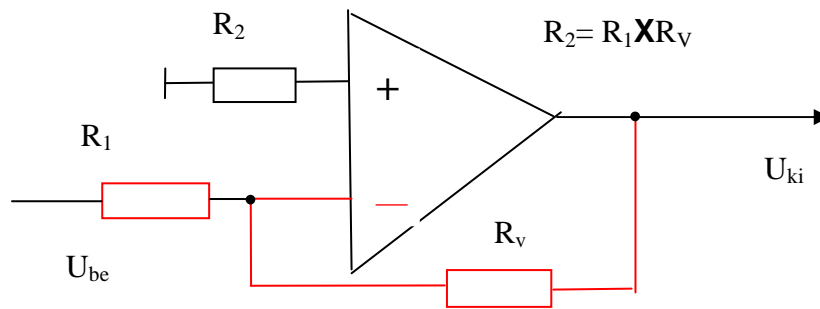
b, Párhuzamos feszültség-visszacsatolás. („Invertáló kapcsolás”)

Ebben az esetben „A” értékeit $-A$ -ra kell változtatnunk, mivel bemenetül az erősítő „-” bemenetét használjuk. Ennek hatására a IV. fejezet (15) egyenlete az alábbiak szerint módosul:

$$A_v(s) = \frac{-aA(s)}{1 + A(s)B(s)} \quad (36) \text{ NB}$$

A visszacsatoló rendszer legegyszerűbb kivitelénél a rendszer bemeneti összegzője egyszerű, ellenállásokkal megvalósított összegző (5-19. ábra) [A (15) jelöléseivel: $B'=1$, $a=R_v/(R_1+R_v)$, $b=R_1/(R_1+R_v)$]⁹⁵

$$\bar{A}_v(j\omega) = \frac{-a\bar{A}(j\omega)}{1+\bar{H}(j\omega)} = -\frac{(R_v/R_1+R_v)\bar{A}(j\omega)}{1+\bar{A}(j\omega)R_1/(R_1+R_v)} \quad (36)$$



5-19.ábra.

Műveleti erősítő párhuzamos feszültség-visszacsatolása („invertáló” kapcsolás)

Azokon a körfrekvenciákon, melyre igaz, hogy $|H| \gg 1$, itt is egyszerű, közismert formulához jutunk:

$$\bar{A}_v(j\omega) = A_v(0) = -\frac{R_v}{R_1} \quad (37) \text{ NB}$$

Ne feledjük, hogy az erősítés ebben az esetben az összegző alkalmazása miatt kevesebb, azaz a rendszer jósági (GB) faktora kisebb, mint a nem-invertáló rendszer esetén.

A bemenő impedancia ebben az esetben nem sokkal több, mint az R_1 ellenállás értéke. Az adott kapcsolásra korlátozva, a Miller-effektus alkalmazásával (5-4. ábra, 112. old. jelöléseinek megfelelően)

$$Z_v(j\omega) = \{2Z_k(j\omega) \times Z_s(j\omega) \times [\frac{R_v}{1+\bar{A}(j\omega)}]\} + R_1 \approx R_1 \quad (38)^{96}$$

Ez természetesen jóval kisebb érték, mint amit a „nem-invertáló” kapcsolásnál kaptunk.

5.7.2. Visszacsatolt rendszerek alapkapsolásai. Szimmetrikus bemenetű alapkapsolások

Ez a megoldás visszacsatolt szimmetrikus rendszer létrehozását célozza meg. Mivel ebben az esetben mindkét bemenetre „szükség van”, nincs más feladatunk, mint hogy feszültségosztó beiktatásával egyenlítsük ki a „nem invertáló” bemenet felől érkező jel nagyobb erősítését. Az

⁹⁵ R_1 természetesen tartalmazza a meghajtó rendszer kimenő impedanciáját, és ez gyakran ismeretlen, még gyakrabban reaktáns tagokat tartalmaz...

⁹⁶ Ezúttal R_2 értékét 0 Ω -nak tekintettük, mivel Z_k értékénél rendszerint sokkal kisebb.

áramoffset minimalizálására ennek az osztónak az ellenállásait érdemes az R_1 és R_v értékekkel megegyezőre választani.

Az 5-20.. ábrán látható kapcsolás esetén

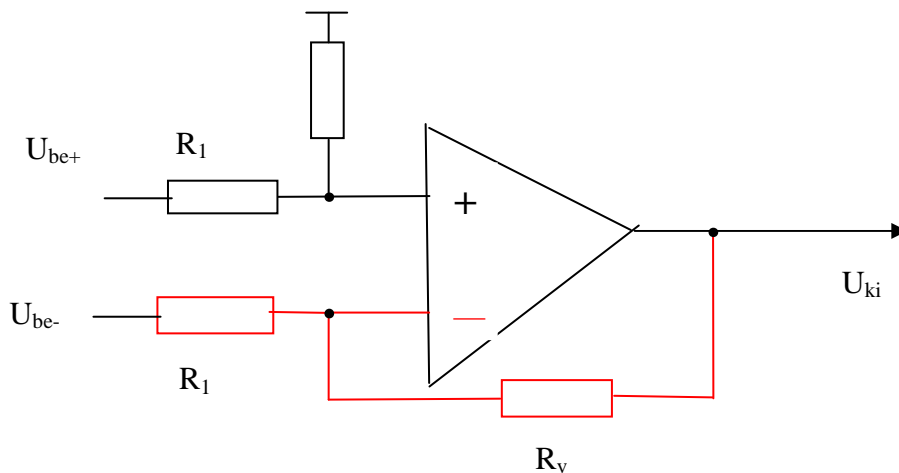
U_{be+} jel erősítése $\approx R_v/R_1$,

U_{be-} jelre pedig $\approx - R_v/R_1$,

A kimeneti feszültség értéke szuperpozícióval számítható:

$$U_{ki} \approx R_v/R_1 (U_{be+} - U_{be-}) \quad (39)$$

(A műveleti erősítőkkel igen sokféle érdekes, és izgalmas kapcsolás hozható létre. Bármilyen bonyolult kapcsolást látunk ne feledkezzünk meg a „virtuális föld” tételéről, melynek segítségével legtöbbször a megoldás triviálissá válhat.)



5-20. ábra

Műveleti erősítő soros (U_{be+}), ill. párhuzamos (U_{be-}) feszültség-visszacsatolásával létrehozott szimmetrikus erősítő kapcsolás

$$A_v(s) = \frac{aA(s)}{1 - A(s)B(s)} \quad (15) \quad \mathcal{NB}$$

5.7.3. Visszacsatolt erősítők átviteli karakterisztikái (amplitúdó-és fázisátviteli karakterisztika)

Megállapításaink minden erősítőre alkalmazhatók, amennyiben teljesülnek az alábbi kikötések:

a, a visszacsatolatlan erősítőnek két valós pólusa van, (ω_1 és ω_2),

b, $\omega_2 \gg \omega_1$.

c, a visszacsatolási „B” érték valós, így $H(s) = BA(s)$.

Mint ismeretes, (Elektronika), a két pólussal modellezhető erősítők stabilak, gerjedésre nem hajlamosak.. Ez a tulajdonságuk megmarad abban az esetben is, ha visszacsatoláskor a „B” értéke valós.(valós visszacsatoló hálózat). A hurokerősítés növekedésével viszont a nemcsak a valós pólusok értéke változik meg, hanem valamely $(1+H_0)^*$ érték túllépése esetén a pólusok konjugált komplex párrá alakulnak át.

Az „a,” kikötés alapján felírhatjuk, hogy

$$A(s) = \frac{A_0}{(1 + s/\omega_1)(1 + s/\omega_2)} \quad (40)$$

Kis frekvenciaértékek mellett a visszacsatolás negatív, így felírható:

$$A_v(s) = \frac{A_0}{(1 + H(s)(1 + s/\omega_1)(1 + s/\omega_2))} = \frac{A_{v0}}{1 + s \frac{1/\omega_1 + 1/\omega_2}{1 + H_0} + \frac{s^2}{\omega_1\omega_2(1 + H_0)}}$$

$$(A_{v0} = \frac{A_0}{1 + H_0})$$

a b, kikötést kihasználva az egyenlet egyszerűsíthető:

$$A_v(s) = A_{v0} \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_1(1 + H_0)} + \frac{s^2}{\omega_1\omega_2(1 + H_0)}}$$

Ennek alapján felírható a két visszacsatolt pólusra kifejtett egyenlet:

$$s_{v1,2} = -\frac{\omega_2}{2} (1 - \sqrt{1 - 4(1 + H_0) \frac{\omega_1}{\omega_2}})$$

Amennyiben relatív gyenge a visszacsatolás, azaz $\sqrt{(1 + H_0)4 \frac{\omega_1}{\omega_2}} \ll 1$, akkor a

$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{x}{2}$ közelítést felhasználva

$$s_{v1} = -\frac{\omega_2}{2} \{1 - [1 - 2(1 + H_0) \frac{\omega_1}{\omega_2}]\} = \omega_1(1 + H_0), \quad s_{v2} = -\omega_2 \quad (40a)$$

H_0 növekedésével (mélyebb visszacsatolás) a pólusok számításához némileg más utat választunk. Vezessük be a

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2(1 + H_0)} \quad (41) \mathcal{NB}$$

jelölést, (ez lesz az új törésponti frekvencia), s kapjuk, hogy

$$A_v(s) = A_{v0} \frac{1}{1 + s \frac{\sqrt{\omega_2/\omega_1}}{\sqrt{(1 + H_0)\omega_0}} + \frac{s^2}{\omega_0^2}} = A_{v0} \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_0 Q_{eq}} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}, \text{ ahol}$$

$$Q_{eq} = \frac{\omega_0 \sqrt{1+H_0}}{\omega_2} = \sqrt{\frac{\omega_1(1+H_0)}{\omega_2}} \quad (42) \text{ NB}$$

Az egyhangú matematikai műveletek végén ugyancsak meglepő (?) az eredmény. Tudjuk, hogy $Q > 1/2$ érték mellett (kritikus csillapítás) az eredetileg békés valós pólusok viols konjugált komplex póluspárrá alakulnak, a rendszernek egyetlen ω_0 töréspontja lesz. $Q > 1/\sqrt{2}$ esetén pedig az átviteli függvényben kiemelés jelentkezik, $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ körfrekvencián. A

kritikus $(1+H^*)$ érték tehát a fentiek alapján

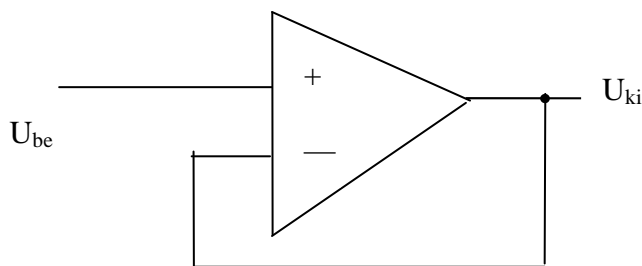
$$(1+H_0)^* = \frac{\omega_2}{4\omega_1} \quad (43) \text{ NB}$$

$1+H_0 = 2(1+H_0)^*$ érték mellett a visszacsatolt erősítő átviteli függvénye megfelel egy másodfokú, $1/\sqrt{2}$ ⁹⁷ körjóságú átviteli függvénynek, a törésponti körfrekvencia pedig:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2 (1+H_0)} = (1/\sqrt{2})\omega_2 \quad (44) \text{ NB}$$

H_0 legnagyobb elérhető értéke A_0 -val egyenlő. ($B = 1$, „követő” kapcsolás, 5-21. ábra) Érdemes a rendszert $H_0 = A_0$ érték mellett Q_{eqmax} értékre letesztelni, és ellenőrizni, hogy nem túl magas-e ez az érték. A Butterworth-féle $1/\sqrt{2}$ értéket lehetőleg ne lépjük túl: Ebben az esetben az impulzus-átvitel még tűrhető, (a túllövés 6 %) és az amplitúdó-átviteli függvény sem mutat kiemelést.

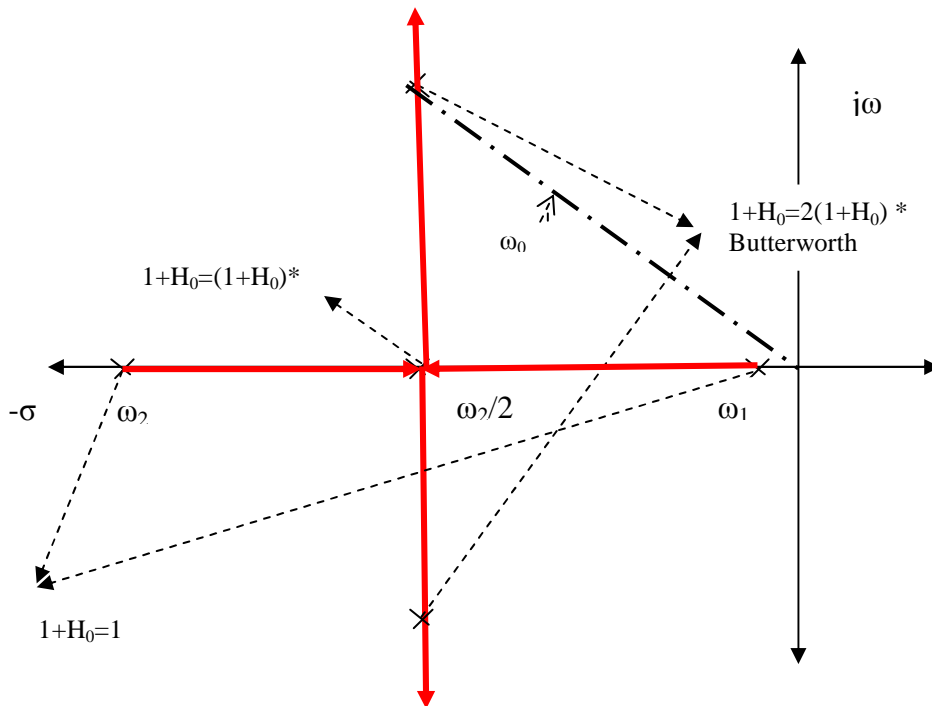
Az 5-22. ábrán (135. oldal) bemutatjuk a pólusok elhelyezkedését különböző $(1+H_0)$ értékek mellett, az 5-23 ábra (135. oldal) visszacsatolatlan és a különböző $1+H_0$ értékek mellett visszacsatolt kétpólusú erősítő Bode diagramját mutatja be.



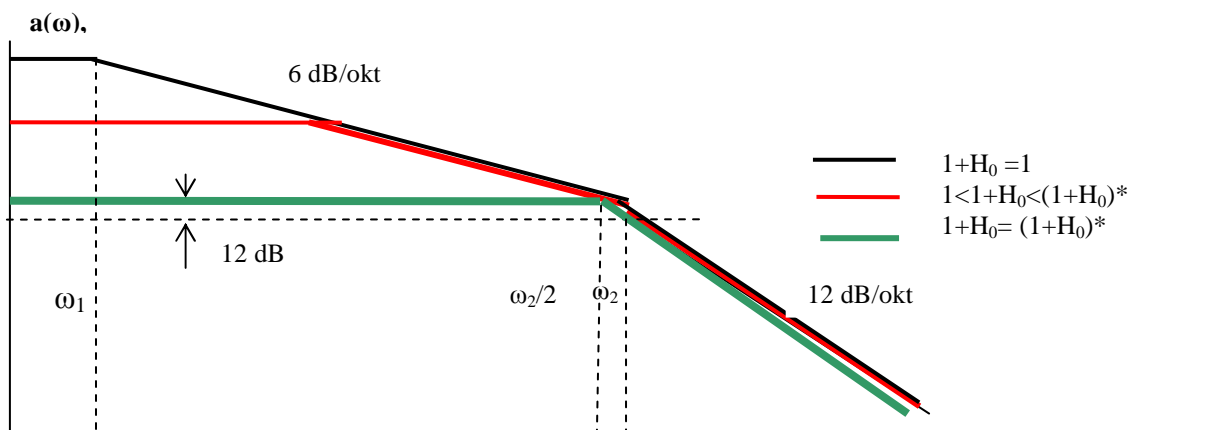
5-21. ábra.
Követő kapcsolás műveleti erősítővel

⁹⁷ Ennél a körjóságnál a rendszer amplitúdó-karakterisztikája nem mutat kiemelést az átviteli sávban. (III. fejezet, (38) egyenlet)

A Bode-diagram vizsgálatából kitűnik, hogy a visszacsatolt erősítő jósági tényezője (GB faktor) a H_0^* hurokértékig változatlan, a „ H_0 ” érték további növelésével pedig csökken. (5-23. ábra)



5-22. ábra
Visszacsatolt kettőspólusú erősítő pólusvándorlása



5-23. ábra
Visszacsatolt kettős pólusú erősítő Bode-diagramja

5.7.4. Frekvenciafüggő visszacsatolás alkalmazási példa: Műveleti erősítő integráló fokozat

A műveleti erősítő alapú integráló fokozat egy frekvenciafüggő visszacsatolású párhuzamos feszültség-visszacsatolt rendszer (5-24. ábra), a visszacsatoló hálózatban $Z_v(j\omega)$ értéke veszteségmentes kondenzátor esetén $1/j\omega C$, amennyiben a kondenzátornak párhuzamosan modellezhető „ R_p ” vesztesége van, akkor

$$Z_v(j\omega) = \frac{1/j\omega C}{1 + 1/j\omega R_p C}$$

Párhuzamos visszacsatolt rendszer alapegyenlete (Ezúttal R_v helyett Z_v -t írunk)

$$A_v = -\frac{Z_v}{R_1 + Z_v/A_0} = -\frac{1}{j\omega R_1 C + R_1/R_p + 1/A_0} = -\frac{1}{j\omega R_1 C + \delta} \quad (45) \mathcal{NB}$$

Ebben az esetben $\delta = \delta_p + \delta_A$,

az un. veszteségi additív valós tagok, az első a kondenzátor párhuzamos veszteségére, a második a műveleti erősítő DC-n mérhető erősítésének véges értékére utal.

Ideális esetben az integrátornak origóban elhelyezkedő pólusa lenne, a valós esetben ez kissé eltolódik a „ σ ” valós tengelyen:

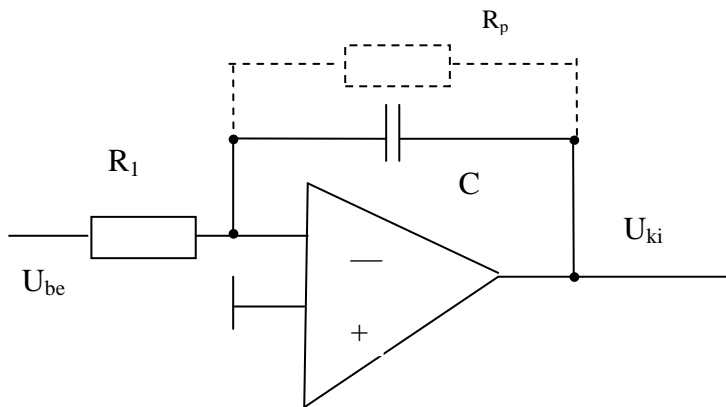
$$s_0 = -\delta/R_1 C \quad (46) \mathcal{NB}$$

Az 5-24. ábrán látható integrátor a gyakorlatban kiegészítésre szorul, mert a kimenet az egyenáramú visszacsatolás hiányában instabil. Ha ismert a bemeneti jel alapharmonikusának frekvenciája, akkor lehetséges, hogy a visszacsatoló kondenzátorral párhuzamosan kiépítsük a DC stabilizáló hálózatot is (5-25. ábra)

Elvileg a „végtelen nagy” A_0 paraméterrel (vagy legalábbis az alsó határfrekvenciás $\omega R_1 C$ szorzathoz képest elhanyagolhatóan kicsi $1/A$ hányadossal) rendelkező műveleti erősítő és kis veszteségű C kondenzátor alkalmazásával a rendszer megközelítheti az ideális integrátort (origóban elhelyezkedő pólus).

Az 5-26. ábrán az integráló erősítő $A_{INT}(j\omega)$ amplitúdó-karakterisztikájának lefutását ábrázoltuk „ideális” és reális esetekben. Az x tengelyre az $R_1 C$ szorzattal normált körfrekvencia, azaz ωRC logaritmusát vettük fel. *Ideális esetben az amplitúdó-karakterisztika 6dB/oktáv meredekséggel zuhan, törése nincs, a $\lg \omega R_1 C$ tengelyt az origóban metszi.*

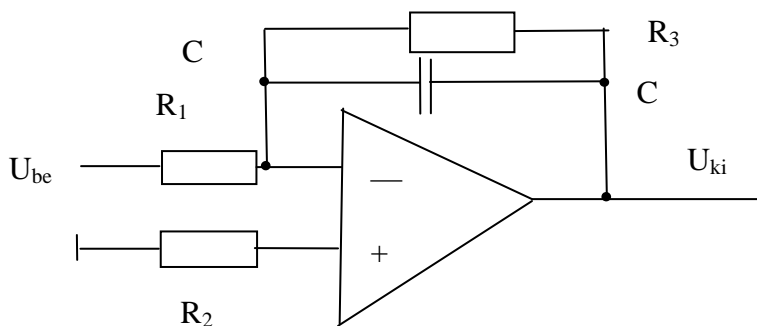
Reális esetben az amplitúdó-karakterisztika Bode-diagramjának a töréspontja megfelel a $(-20 \lg \delta)$ értéknek, a $\lg \omega R_1 C$ tengelyt viszont gyakorlatilag az origóban metszi.



5-24. ábra.

Műveleti erősítő integrátor elvi rajza

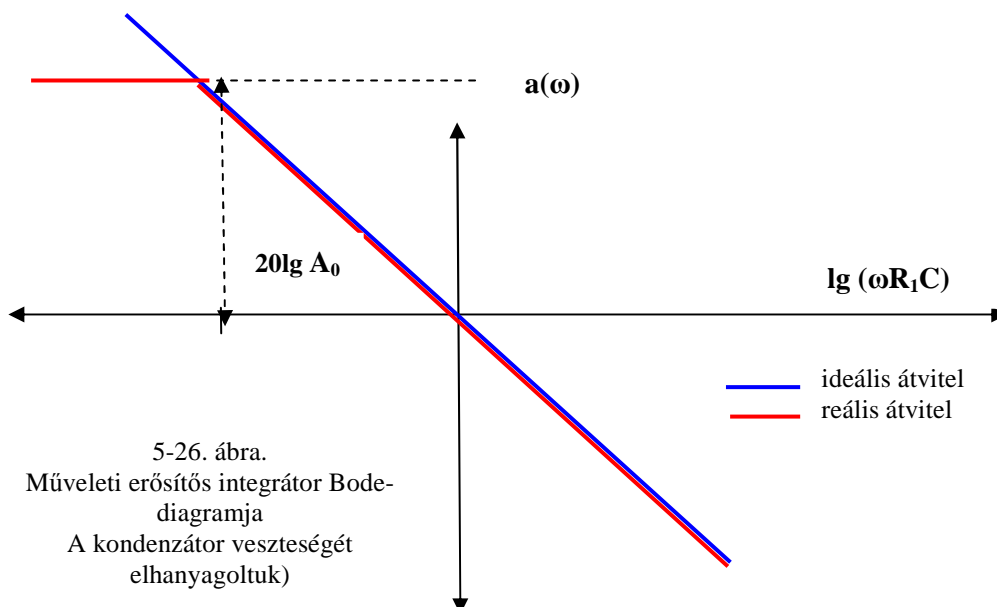
(a kondenzátor valós veszteségét párhuzamos ellenállással érzékeltettük)



5-25. ábra.

Műveleti erősítő integrátor gyakorlati kapcsolása

(a kondenzátorral párhuzamosan kötött hálózat a DC átvitelt stabilizálja, az R2 ellenállás a járulékos offsetet minimalizálhatja)



5-26. ábra.

Műveleti erősítő integrátor Bode-diagramja

A kondenzátor veszteségét elhanyagoltuk)

Ellenőrző kérdések:

1. Mit nevezünk szimmetrikus erősítőnek? Lehet a kimenete aszimmetrikus?
2. Mit tekintünk a szimmetrikus erősítő gerjesztésének?
3. Mi a közös feszültség?
4. Mi a különbség a D_u és az E_{ku} között? Mivel egyenlő az aszimmetrikus kimenetű szimmetrikus erősítő D_u értéke?
5. Mi a CMR? Miben fejezzük ki?
6. Mikor nevezünk egy szimmetrikus és egy aszimmetrikus kimenetű szimmetrikus erősítőt műveleti erősítőnek?
7. Általában milyen formában írható le legegyszerűbben egy műveleti erősítő átviteli függvénye?
8. Mit nevezünk a műveleti erősítő áramoffsetjének? Milyen módokon minimalizálható?
9. Milyen fokozatokból épül fel egy műveleti erősítő?
10. Mit nevezünk áramtükörnek? Mi az áramtükör alapvető funkciója egy műveleti erősítőben?
11. Lehetséges létrehozni visszacsatolt szimmetrikus erősítőrendszert? Milyen visszacsatolásokat kell alkalmaznunk?
12. Mit nevezünk kritikus visszacsatolási hurok-értéknek?

VI. fejezet

Szűrők

6.1. Alapismeretek, meghatározások

A szűrők olyan hálózatok, melyek tervezésénél a hálózat $A(\omega)$ amplitúdó- karakterisztikának (3.29a) az átviteli sáv két, jól elkülöníthető tartományában az alábbi követelményeknek kell megfelelnie:

Az átviteli sávban (a harmonikus komponenseket a hálózat „torzítás nélkül” átengedi):

$$A(\omega) \geq A_{(a)\min}$$

A zárási sávban (a harmonikus komponenseket a hálózat „nem engedi át”):

$$A(\omega) \leq A_{(z)\max}$$

A két tartomány között, az *átmeneti tartományban* az amplitúdó-átvitelre nincs kikötés, viszont a jelleggörbe átmeneti jellegét valójában meghatározza az átmeneti tartomány nagysága. Minél „szűkebb”-re kell tervezni ezt a tartományt, és minél nagyobb $a_{(a)\min}$ és $a_{(z)\max}$ különbsége (A értékeit dB-ben fejezzük ki), annál meredekebbnek kell lenni a jelleggörbe-átmenetnek az átmeneti tartományban,. (6-1. ábra), annál bonyolultabb kivitelű szűrőre van szükség.

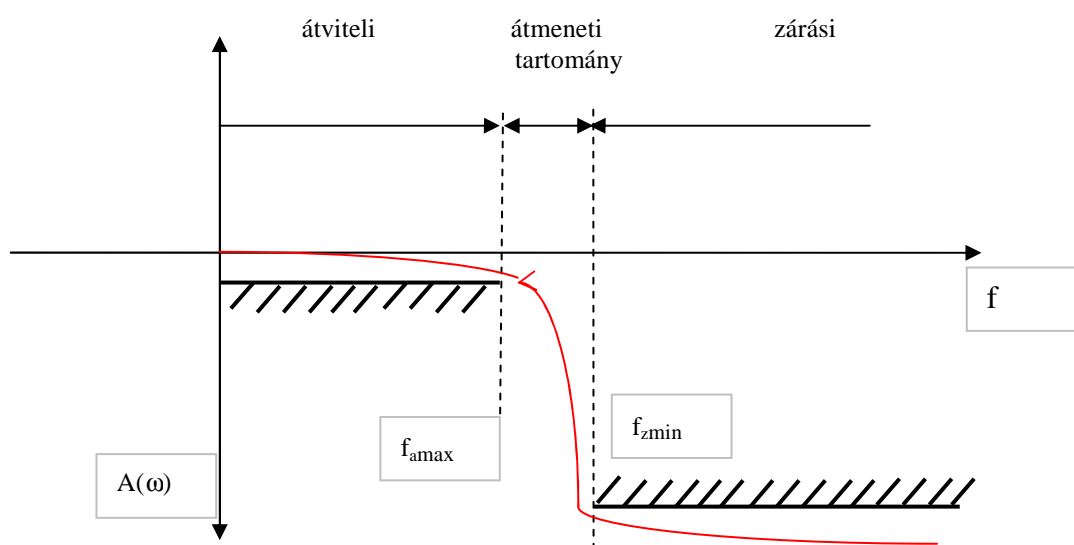
Egyes esetekben fontos lehet a $\varphi(\omega)$ fáziskarakterisztika is. Gyakran szerepel a követelmények között a futási, ill. csoportfutási idő (utóbbi sávszűrők esetében) %-ban mért eltérése valamely kitüntetett körfrekvencián (aluláteresztő szűrő esetében 0, sávszűrő esetében a sávközépi körfrekvencia-érték) mért értéktől. Az esetek egy részében azonban a fáziskarakterisztikára vonatkozó követelmények hiányoznak, egyes esetekben ennek az az egyszerű oka, hogy *az emberi fül érzéketlen a fázistorzításokra*.

Az átviteli és zárási tartományok helyzete szerint a szűrőket négy alapcsoportra szokás osztani:

1. Aluláteresztő szűrő (Low pass filter). Az átviteli tartomány alsó határa 0 Rad/sec, felső határa ω_{\max} , a zárási tartomány alsó határa ω_{\min} , felső határa ∞ . $\omega_{\max} < \omega_{\min}$. (A 6-1. ábra ilyen jellegű szűrőt ábrázol.).
2. Feluláteresztő szűrő.(High pass filter) Az átviteli tartomány alsó határa ω_{\min} , felső határa elvileg ∞ , a zárási tartomány határai 0 Rad/sec és ω_{\max} . ($\omega_{\min} > \omega_{\max}$.)
3. Sávszűrő. (Band pass filter) A szűrő egy meghatározott frekvenciasáv átvitelére alkalmas, a sáv alatti és feletti frekvenciák a zárási, ill. az átmeneti tartományba

tartoznak. Az átviteli sáv határai ω_{amin} és ω_{amax} , a zárási sáv határai egyrészt 0 Rad/sec és $\omega_{z1\text{max}}$, másrészt $\omega_{z2\text{min}}$ és ∞ .

4. Sávszűrő szűrő. („Lukszűrő”, Band rejection filter). A sávszűrő „ellentettje”. Elvileg valamennyi frekvenciát átengedi, a zárási sáv, és a zárási sávval mind a csökkenő, mind pedig a növekvő frekvenciák felé szomszédos átmeneti sáv kivételével. az átviteli sáv határai egyrészt 0 Rad/sec és $\omega_{a1\text{max}}$, másrészt $\omega_{a2\text{min}}$ és ∞ . A zárási sáv határai $\omega_{z\text{min}}$ és $\omega_{z\text{max}}$



6-1. ábra . Aluláteresztő szűrő átviteli követelményei, és egy lehetséges átviteli görbe

6.2. A szűrőkhöz fűződő átviteli követelmények közelítése (approximációja) különböző átviteli függvényekkel. A szűrők alapcsaládjai

A különböző jellegű (aluláteresztő-, feluláteresztő szűrők, sáv és sávszűrő szűrők) átviteli függvényének megalkotása az aluláteresztő szűrő átviteli függvényére vezethető vissza. Valamennyi szűrőtípusnak megfeleltethető aluláteresztő szűrő, majd megfelelő transzformációval áttérhetünk a kérdéses szűrőtípusra.

A továbbiakban az aluláteresztő szűrők átviteli függvényeivel foglalkozunk. Vizsgálataink során az alábbi új jelöléseket fogjuk alkalmazni:

Az aluláteresztő szűrő transzfer függvénye az alábbi polinommal írható fel:

$$\bar{K}(s) = \frac{K(0)}{C_0 + C_1s + C_2s^2 + \dots + C_ns^n} \quad (2)$$

ahol K_0, C_0, \dots, C_n valós értékek.

A szűrő fokszáma megegyezik a függvény fokszámával, azaz a legnagyobb, nem 0 értékű együtthatóval rendelkező s változó kitevőjével. (esetünkben n).

Mint látható, az aluláteresztő szűrő transzfer függvénye gyöktényezős alakjának kifejtésekor nem találunk zérust, csak pólust.

Fentiek alapján a követelményeknek megfelelő szűrő tervezésének *elvileg* az alábbi módon kellene lezajlania:

a, A követelményekben rögzített $A(\omega)$ specifikáció, valamint szükség esetén a be-és kimeneti jel alakjának összevetése alapján *meghatározzuk a specifikációt legjobban közelítő szükséges transzfer függvényt.*

b, Megtervezzük azt a hálózatot, mely kielégíti az adott $\bar{K}(j\omega)$ átviteli karakterisztikát. (Több megoldás is lehetséges, közülük egyéb szempontok (passzív, vagy aktív hálózat közötti választás, zaj, túlvezérlés, stb.) alapján választhatjuk ki a számunkra legmegfelelőbb kapcsolást.

Ezt az utat csak a nagyon egyszerű feladatok megoldásakor választhatjuk.

Valójában egészen más a mérnöki munka jellege.

Kiindulva az $A(\omega)$ görbéhez fűződő követelményekből (átviteli sáv, átmeneti sáv, zárási tartomány), a tűrésmezőnek és a (csoport)futási idő- előírásoknak megfelelően öt (valójában több) különböző jellegű szűrő „standard” transzfer függvénye közül választhatunk. Ezek az átviteli függvények a szűrő kiindulási specifikációjának *közelítései*. Ezek a függvények – az un. „kritikus csillapítású szűrő” függvényén kívül – a szűrők elméletét kidolgozó fizikusok, matematikusok és villamosmérnökök (!) neveit viselik.

Az egyes átviteli függvényeket („polinomokat”) a szükségletnek megfelelően '1' fokszámtól egészen nagy fokszámig kidolgozták, ezen túlmenően a polinomokat első- és másodfokú polinomok szorzataira bontva megadták az egyes alaptagok paramétereit.

A mai modern szűrők ugyanis *kaszkád jellegűek*, azaz 1. és 2. fokú alaptagokra vannak bontva. Az alaptagok átviteli függvényei a teljes átviteli függvény gyöktényezős alakjából származtathatóak. (3. fejezet) Az ilyen szűrők kapcsolása *alaptagokból, és elválasztó elemekből* áll.

Az alaptagok (1., 2. fokú, esetleg 3. fokú) lehetnek passzív (RC, RLC), vagy aktív hálózatok (műveleti erősítő és RC elem), az elválasztó tagok mindig aktív hálózatok, melyeknél a bemenő impedancia elvileg végtelen, a kimenő impedancia pedig elvileg 0. Páros fokszámú szűrőknél a másodfokszámú alaptagok, (számuk $n/2$,) páratlan szűrőknél természetesen egyet-

len egyes fokszámú alaptag („integráló áramkör”), és $(n-1)/2$ másodfokú alaptag paramétereit adták meg.

Ily módon a legkényelmesebb szűrőtervezés az egyes alaptagok jellemző un. végparamétereinek „kiszámítására” (szorzás és osztás útján), az alaptagok kapcsolásának kiválasztására (szintén pontosan kidolgozott), majd a kapcsolatban szereplő elemek (R,L,C) értékeinek meghatározására korlátozódik.

Az alábbiakban igen gyorsan áttekintjük a különböző jellegű aluláteresztő szűrőcsaládok tulajdonságait, előnyeit és hátrányosabb tulajdonságait. Az egyes alapcsaládok az adott követelményeket *különböző átviteli függvények segítségével elégítik ki, melyek az alapkövetelmények teljesítésén túl gyökeresen különböző jellegű amplitúdó- és fázisátvitelt eredményeznek.*

1. Sávhatárolatlan (ideális, azaz végtelen nagy élmeredekségű) $1(t)$ függvény túllövésmentes, ezen belül a lehető leggyorsabb felfutási és késleltetési idejű átvitelét a kritikus csillapítású másodfokú tagokat tartalmazó szűrők biztosítják. (A másodfokú szűrő-alaptagok körjósága $1/2$). Ebben az esetben az $A(\omega)$ jelleggörbe „lapossága” az átviteli sávon belül messze nem optimális, a fő probléma azonban az átmeneti sáv szélessége. A zárási tartományban előírt nagy jelelnyomás esetén a szűrő elbonyolódik, ami — egyebek között — a késleltetési idő megnövekedéséhez vezet. Használata korlátozott. Előnye az igen egyszerű tervezés.

2. Sávhatárolt impulzus „legszebb” átvitelét a Bessel-féle⁹⁸ közelítést realizáló szűrők biztosítják. Sávhatárolatlan esetben a kimeneten enyhe túllövés tapasztalható. A legjobb fáziskarakterisztikát biztosítja, amplitúdó-karakterisztikája némileg jobb, mint a kritikus csillapítású szűrőé.

3. Az átviteli sávban a „legszebb” $A(\omega)$ jelleggörbéje a maximális laposságú („maxlap”), Butterworth⁹⁹ által kidolgozott közelítésű szűrőnek van. Az $1(t)$ átvitelben sajnos túllövés, sőt némi berezgés is tapasztalható, a fázisátvitel sem briliáns, a sávhatárolt impulzusátvitel viszont tűrhető. Jó kompromisszumot jelent az átviteli-, az átmeneti- és a zárási sávhoz fűzhető követelmények kielégítésére, nem mellesleg a legkönnyebben tervezhető, és elemezhető szűrő. Igen népszerű.

4. Ha az átviteli sávban megengedhető az amplitúdó-átvitel „hullámozása”, vagy akár a sávon belül az egyenáramú értékhez képest pozitív értékű átvitel, viszont szűk átmeneti sáv áll rendelkezésre, és a zárási tartományban nagy elnyomásra van szükség, a Csebysev-közelítésű

⁹⁸ **Frierich Wilhelm Bessel** 1784 , Minden, Westphalia , — 1846 Königsberg, Poroszország, matematikus, fizikus

⁹⁹ Stephen Butterworth: (1885, Rochdale-1958, Cowes, Anglia). Angol villamosmérnök, a róla elnevezett szűrőt az alábbi publikációjában tette közzé: *On the Theory of Filter Amplifiers* In: *Wireless Engineer*, Band 7, 1930, pp.536–541

szűrőket¹⁰⁰ kell használni. Hadiiparban, vezetékes klasszikus híradástechnikában igen népszerű, ma már könnyen tervezhető szűrő. Fázis-és impulzusátvitele gyengébb. Nagymértékű túllövés, az egyes tagok nagy körjósága miatt csak lassan csillapodó berezgések jellemzik a szűrő impulzus-átvitelét.

Igen elterjedtek az ún. „*inverz-Csebysev*” szűrők. Az átmeneti sávban a jelleggörbe zuhanása igen gyors, az átviteli sávban az átvitel jobb, mint a klasszikus Csebysev-esetben, ezért az árat a zárási sávban kell megfizetni. Itt megengedhető a jel-elnyomás adott hullámzása.

5. Cauer-szűrőket akkor szoktunk használni, ha az átviteli sávban az $A(\omega)$ karakterisztikának aránylag kismértékű hullámzásához a zárási sávban adott hullámzás, valamint az átmeneti sávban igen gyors $A(\omega)$ változás szükséges. Ez a szűrőtípus az ún. derivált-szűrők közé tartozik.

Az egyes aluláteresztő szűrők gyors áttekintéséhez tekintsük át azokat a jelöléseket, melyeket a 4. fejezet további részeiben alkalmazni fogunk:

ω_3 — az a körfrekvencia, ahol az aluláteresztő szűrő $A(\omega)$ amplitúdó átvitele a DC-értékhez képest 3 dB-t csökken;

ω_{3i} — az adott szűrőalaptag $A(\omega)$ jelleggörbéjének 3 dB-es pontja;

ω_0 = az adott szűrőalaptag Bode-diagramjának töréspontja. Passzív másodfokú tag esetén általában az adott szűrőalaptag önrezonanciája (általában a soros rezgőkörön átfolyó áram max. értéke határozza meg, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$), elsőfokú tag esetén a tag pólusa, $\omega_0 = 1/RC$

q — (gyakori jelölése = \sqrt{b} , elsőfokú alaptag esetén „ a ”) — az adott másodfokú szűrőtagra vonatkozó ω_3/ω_0 hányados;

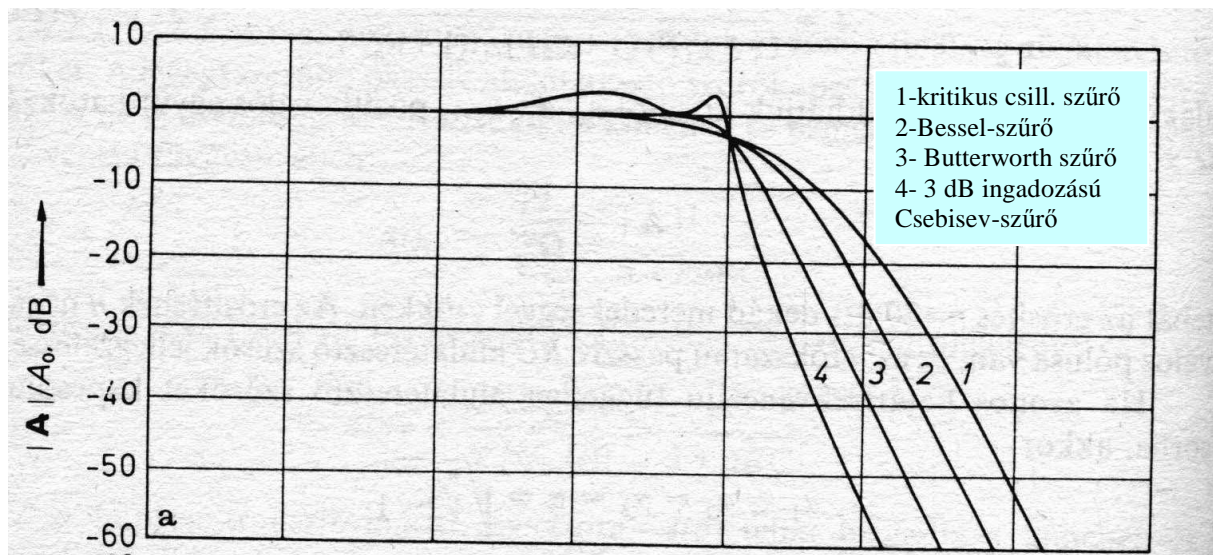
Q — másodfokú tag esetén passzív kivétel mellett az adott szűrőtag körjósága, aktív tag esetén az ennek megfelelő paraméter az átviteli függvényben.

S — s/ω_3 — a szűrő normált Laplace változója

Ω — ω/ω_{3i} a szűrő normált körfrekvenciája, értéke a ω_3 körfrekvencián 1.

Fenti bevezetés illusztrációja gyanánt bemutatjuk különböző jellegű negyedfokú aluláteresztő szűrők amplitúdó-átvitelét.

¹⁰⁰ Pafnutyij Lvovics Csebysov vagy más átírásban Csebysev, Csebisev ([oroszul: Пафнutyий Львович Чебышев](#)) (Okatovo, [Oroszország](#) 1821. május 16. – 1894. december 8. [Szentpétervár](#), [Oroszország](#)), világhírű orosz matematikus.



6-2. ábra Negyedfokú aluláteresztő szűrők amplitudó átvitele
(Közös pont: $\Omega=1$, $A(\omega)/A_0 = -3$ dB)

6.3. Kritikus csillapítású szűrők

A szűrők nevüket a másodfokú alaptag csillapításának kritikus értékéről kapták. A másodfokú alaptag amplitudó átvitelének levezetéséhez a 3. fejezet 32a egyenletéből kell kiindulnunk.

$$\bar{K}(j\omega) = \frac{K(0)}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + j\omega/(\omega_0 Q)} \quad (3. \text{ fejezet } 32a),$$

bevezetve a 4.3. pontban specifikált rövidítéseket:.

$$\bar{K}(j\omega) = \frac{K(0)}{1 - \Omega^2/q^2 + j\Omega q/(Q)} \quad (3)$$

az amplitudó-átvitel az alábbi egyenlet szerint írható le:

$$K(\omega) = \frac{K(0)}{[(1 - q^2\Omega^2)^2 + (\frac{\Omega q}{Q})^2]^{1/2}} \quad (4)$$

$Q=1/2$ érték esetén

$$K(\omega) = \frac{K(0)}{1 + \Omega^2 q^2} \quad (5)$$

Ez az egyenlet az alábbi formába is átírható:

$$K(\omega) = \frac{K_1(0)}{\sqrt{1 + \Omega^2 q^2}} \times \frac{K_2(0)}{\sqrt{1 + \Omega^2 q^2}} \quad (6)$$

A (6) egyenletből látszik, hogy ez a másodfokú alaptag két egyforma pólusú elsőfokú alaptag un. kaszkád csatolásából¹⁰¹ is előállítható. (Ez csak a $Q \leq 1/2$ körjóságú alaptagokra igaz). n-ed fokú kritikus csillapítású szűrő amplitúdó átvitele a fentiek szerint:

$$K(\omega) = \frac{K(0)}{\{\sqrt{1 + \Omega^2 q^2}\}^n} \quad (7) \text{ NB}$$

„q” értékét úgy kaphatjuk meg, hogy a (7) egyenlet nevezőjét $\Omega = 1$ értéknél $\sqrt{2}$ -vel tesszük egyenlővé (3 dB):

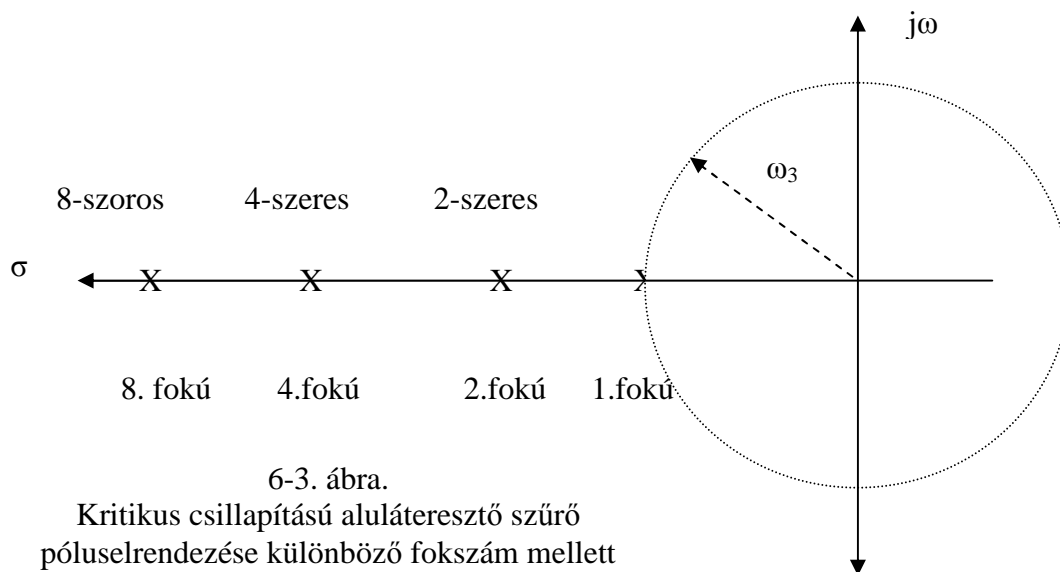
$$q = \sqrt{2^{1/n} - 1} \leq 1 \quad (8)$$

A fentiekből látható, hogy a kritikus csillapítású szűrők használata esetén a kívánt szűk átmeneti sáv eléréséhez a többi szűrőcsaládhoz képest nagyobb fokszámú szűrőre van szükség, ami a $H(t)$ jel átvitelénél nagyobb késleltetési időt eredményez. Az egyes szűrőtagok kívánt „ ω_0 ” értéke a 'q' csökkenése miatt a fokszám növekedésével elég gyorsan nő. Az 1. táblázatban összefoglaltuk a különböző fokszámú kritikus csillapítású szűrők főbb tulajdonságait. A kritikus csillapítású szűrő előnyei között fel szokták sorolni, hogy elsőfokú tagokból is összerakható, „tekercek nélkül”. Mint látni fogjuk, ennek ma már nincs jelentősége. Az viszont kétségtelen, hogy a fokszámtól függetlenül is túllövésmentes impulzus-átvitelt eredményez.

6-1. Táblázat. Kritikus csillapítású szűrők jellemzői

fokszám, n	Elsőfokú tagokra vonatkozó $q = \omega_3 / \omega_0$ együttható	$a(\omega) = -30$ dB értékhez tartozó körfrekvencia, ω_3 -körfrekvenciára normálva	$H(t)$ jel késése, $1/\omega_3$ -időértékre normálva
1	1	32	0,1
2	0,6436	8.7	0,172
4	0,435	5.4	0,254
8	0,3001	5.1	0,367

¹⁰¹ Négy-pólusok kaszkád összekapcsolása azt jelenti, hogy az első négy-pólus kimenetét a következő bemenetével kapcsoljuk össze oly módon, hogy az összekapcsolás ne befolyásolja az egyes négy-pólusok paramétereit (beterhelés, visszahatás).



6-3. ábra.
Kritikus csillapítású aluláteresztő szűrő
póluselrendezése különböző fokszám mellett

Mint hamarosan látjuk, a szűrő impulzusátvitele ezzel együtt sem optimális. Ugyanakkor az átmeneti tartomány szélessége azonban a fokszám növelésével csak lassan keskenyedik, mivel az egyes elemek ω_0 önrezonancia-értéke, azaz a Bode-diagrammok töréspontja egyre messzebb kerül a szűrő ω_3 értékétől.

6.4. Bessel-féle szűrő

A Bessel – féle szűrőcsalád alapvetése az ideális fáziskarakterisztika un. maximális laposságú megközelítése. Ez a terminológia azt jelenti, hogy valamilyen ideális összefüggést úgy próbálunk megközelíteni, hogy a hibaérték a (kör)frekvencia függvényében a legkisebb legyen avval a megköötéssel, hogy a frekvencia függvényében ez az érték csak monoton változhat, azaz a hiba értékének a frekvencia növekedésével csak egy irányba szabad változnia. (növekedés után nem lehet csökkenés, stb.).

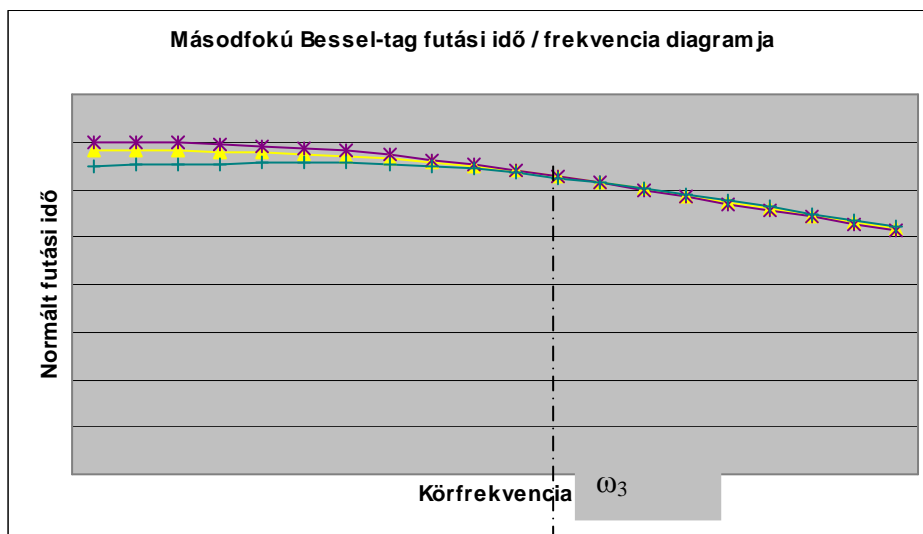
Másodfokú szűrő esetét vizsgálva a 6-4. ábrán (következő oldal) bemutattuk a futási idő ($t_{cs}=d\varphi/d\omega$,) jelleggörbéjének lefutását különböző Q értékek mellett. Látható, hogy $Q=0,6$ érték ugyan kisebb futási idő-ingadozást eredményez az átviteli sávban, de $Q=0,58$ érték még monoton csökkenést eredményez. A monoton csökkenés természetesen kisebb Q értékekre is igaz, de ebben az esetben már nő a futási idő csökkenés az átviteli sávon belül.

Valóban, $Q=0,58$ érték alatt az átmeneti függvény élmeredeksége csökken, s ha magasabb Q értékekkel kísérletezünk, úgy az átmeneti függvény berezgéseket mutat. $Q=0,58$ mellett ugyan az átmeneti függvénynek már túllövése van (hiszen túlléptük a kritikus csillapítás $Q=0,5$ értéket), amennyiben azonban a bemeneti impulzus-jel sávhatárolt, azaz nincsenek az

átviteli sávon kívül eső összetevői (ilyen jel egyébként nem fordul elő, de ilyen *jellegű* jelek igen gyakoriak), úgy a kimeneti jelnek nem lesz túllövése.

A Bessel-féle transzfer függvénynek megfelelő szűrők impulzus-átvitele optimális, adott alkalmazások esetén igen elterjedtek.

2. táblázatunkban megadtuk különböző fokszámú Bessel-szűrők elemeinek körjóságát, illetve az önrezonancia q szorzóját az ω_3 körfrekvenciához képest.

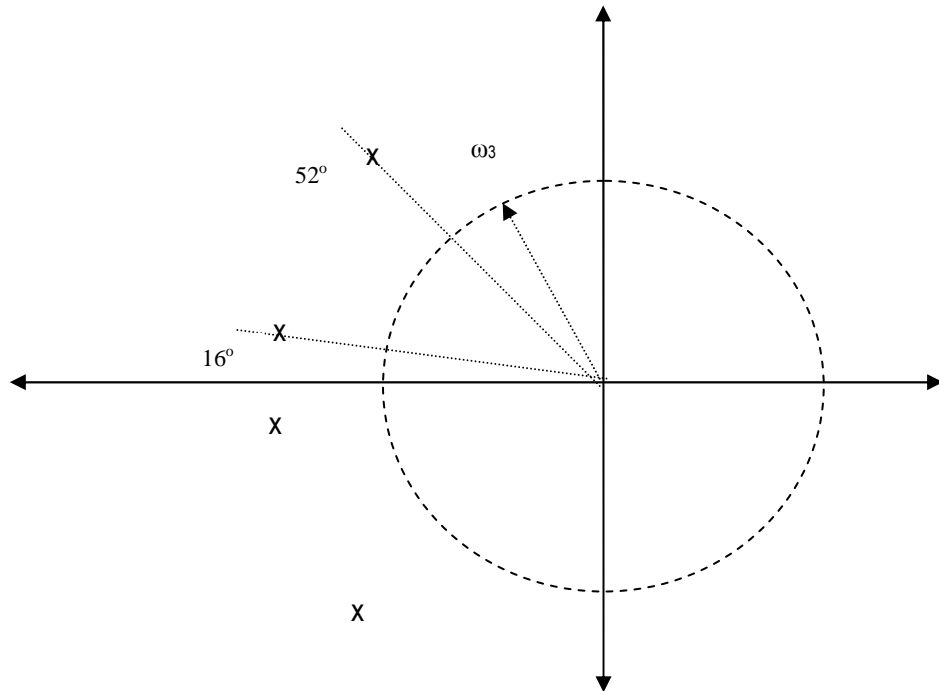


6-4. ábra. 2.fokú szűrő futási-idő karakterisztikája $Q = 0,56$ (bíbor) $Q=0,58$ (Bessel szűrő, sárga), és $Q=0,6$ (zöld) értékek esetén

6-2. Táblázat. Bessel-szűrők jellemzői

fokszám, n	$q=\omega_3/\omega_0$ együttható	Másodfokú komponens körjósága, Q	A (ω) = -30 dB értékhez tartozó körfrekvencia, ω_3 -körfrekvenciára normálva	H(t) jel késése, $1/\omega_3$ -időértékre normálva
1	1		30	0,1
2	0,7861	0,58	7	0,195
4	0,6992 0,6237	0,52 0,81	4	0,329
8	0,5623 0,5458 0,512 0,4568	0,51 0,56 0,71 1,23	3,6	0,505

A 6-5. ábrán 4.fokú Bessel-szűrő pólusainak elhelyezkedését mutatjuk be. A 2. táblázatból már kitűnik, hogy mindkét póluspár az ω_3 sugarú körön kívül helyezkedik el, de messze nem olyan távol, mint a kritikus csillapítású szűrő esetén.



6-5. ábra. 4. fokú aluláteresztő Bessel-szűrő pólusai

6.5. Butterworth-(max. laposságú, „maxlap”) szűrő

Butterworth 1930-ban egyik publikációjában tett javaslatot olyan átviteli függvénnyel rendelkező aluláteresztő szűrők használatára, melynél a $\bar{K}(j\omega)$ átviteli karakterisztikából származtatott $a(\omega)$ amplitúdó-átviteli karakterisztika az ideális Bode-diagramnak megfelelő törtvonalas karakterisztikától a legkisebb eltérést mutatja úgy, hogy — hasonlóan a Bessel-szűrők fázismenetéhez — az átviteli sávon belül monoton csökkenést mutasson úgy, hogy teljesüljön mind a

$$\frac{\partial K(\omega)}{\partial \omega} \leq 0, \text{ mind a } \frac{\partial^2 K(\omega)}{\partial \omega^2} \leq 0 \text{ egyenlőtlenség. Egyszerűbben ez azt jelenti, hogy az } A(\omega)$$

frekvenciamenetnek egyenletesen „lefelé hajlónak” kell lennie, úgy mind egy egyszerű elsőfokú tag esetén, csak a lehetőségek szerint a legjobb mértékben meg kell közelítenie az ideális Bode-diagram szerinti törtvonalas karakterisztikát.

Butterworth villamosmérnök volt, nem matematikus. Fenti előírások teljesítésére igen egyszerű átviteli polinom rendszert dolgozott ki, az azóta Butterworth-féle elnevezésű polinomokat.

Ezek a $B(S) = 1 + B_1S + B_2S^2 + \dots + B_nS^n$ polinomok olyan $K(S) = 1/B(S)$ átviteli függvényt határoznak meg, amelynél a származtatott $A(\omega)$ amplitúdó-karakterisztika nevezőjében (a

négyzetgyökjel alatt) olyan polinom keletkezik, amely csak „0”, és $2n$ kitevőjű ω változókat tartalmaz, mindkettőjük együtthatója „1”:

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}} \quad (9) \quad \mathcal{NB}$$

Fenti összefüggés 0 körfrekvencián A_0 átvitelt, míg ω/ω_3 normált körfrekvencia érték mellett valóban az előbbi érték $\sqrt{2}$ -ed részét eredményezi.

Miután más értékű kitevőt a karakterisztika nem tartalmaz, így valóban a $0 \leq \Omega \leq 1$ tartományban a nevező csak azt a tagot tartalmazza, mely a többihez képest a *legkisebb mértékben nő*.

Tekintsük a Butterworth-féle másodfokú szűrő polinomjának levezetését

$$(S = s/\omega_3; \quad \Omega = \omega/\omega_3)$$

$$K(S) = A_0 / B(S); \dots B(S) = 1 + B_1 S + B_2 S^2 \quad (10)$$

$$\bar{K}(j\Omega) = A_0 / (1 + B_1 j\Omega - B_2 \Omega^2), \text{ behelyettesítve a (3) egyenletbe}$$

$$B_1 = q/Q, B_2 = q^2; \text{ így}$$

$$\bar{K}(j\Omega) = A_0 / (1 + \frac{q}{Q_1} j\Omega - q^2 \Omega^2), \quad K^2(\Omega) \text{ összefüggésre az alábbi egyenlet adódik:}$$

$$[A(\Omega)]^2 = A_0^2 / [(1 - q^2 \Omega^2)^2 + \frac{q^2 \Omega^2}{Q^2}], \quad (11)$$

Elvégezve a négyzetre emelést a negyedfokú tag együtthatójának „1”-nek kell lennie, így:

$$q = 1; \quad (11A) \quad \mathcal{NB}$$

a 2. fokú tag együtthatóinak összegét nullázva pedig kapjuk, hogy:

$$Q = 1/\sqrt{2} \quad (11b) \quad \mathcal{NB}$$

tehát az eredeti polinomban $B_1 = q/Q = \sqrt{2}$; $B_2 = 1$, a másodfokú Butterworth-polinom tehát:

$$B(S)_2 = 1 + \sqrt{2}S + S^2 \quad (11c)$$

(Hasonló módon képezhetjük a 4.fokú polinomot is: mindkét másodfokú tagra $q=1$, (ez igaz valamennyi Butterworth-szűrőtagra), Q értékei pedig 0,51 és 1,34. Ennek alapján a negyedfokú polinom:

$$B(S)_4 = [1 + (1/0,51)S + S^2] [1 + (1/1,34)S + S^2] = 1 + 2,613S + 3,414S^2 + 2,613S^3 + S^4$$

Az alábbi táblázat tartalmazza a különböző fokszámú Butterworth szűrők másodfokú komponenseinek Q értékeit. Közöljük a megfelelő pólusokhoz tartozó „ ζ ” értékeket is ($\cos \xi = 1/2Q$)

A Butterworth-szűrőkre nemcsak az $A(\omega)$ jelleggörbének az átviteli sávban az ideálishoz közeli lefutása jellemző, hanem a relatíve szűk átmeneti sávérték is, azaz a ω_3 értékhez közel

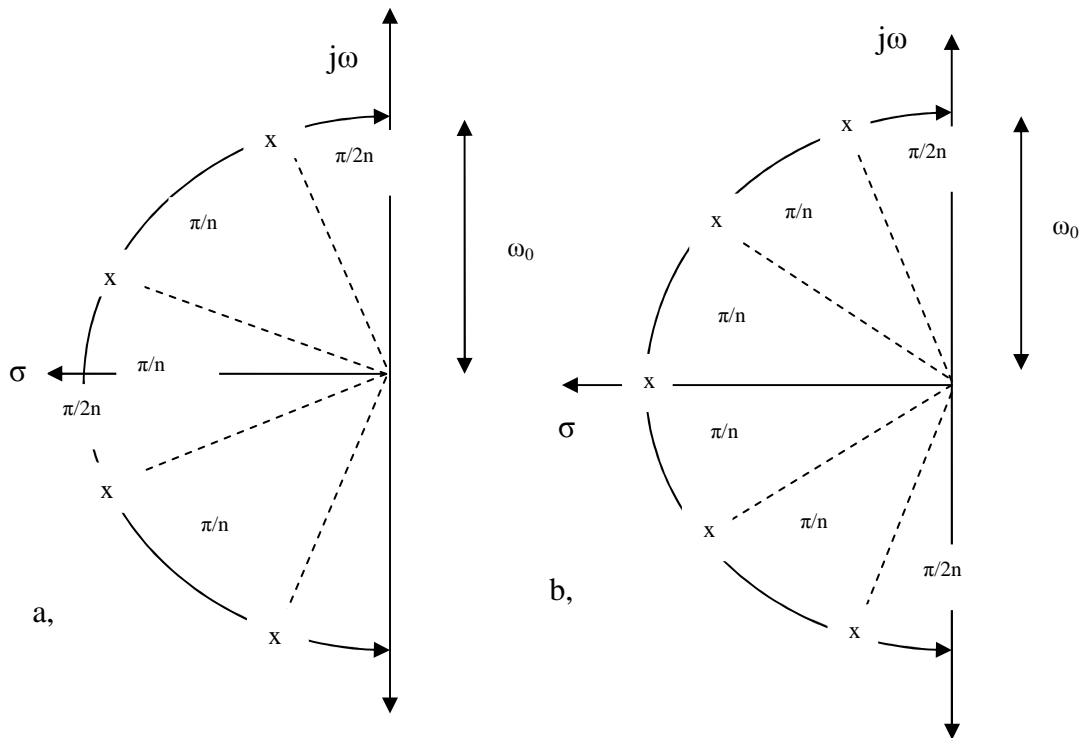
jó elnyomás érhető el relatíve kis fokszám, azaz egyszerű felépítés mellett is. Ez annak a következménye, hogy az egyes építőelemek ω_0 értéke nem magasabb, mint az ω_3 érték, azaz a Bode-diagramok töréspontja egybeesik az ω_3 értékkel.

6-3. Táblázat. Butterworth-szűrők alaptagjainak körjósága, a pólusok elhelyezkedése, zárási paraméterei

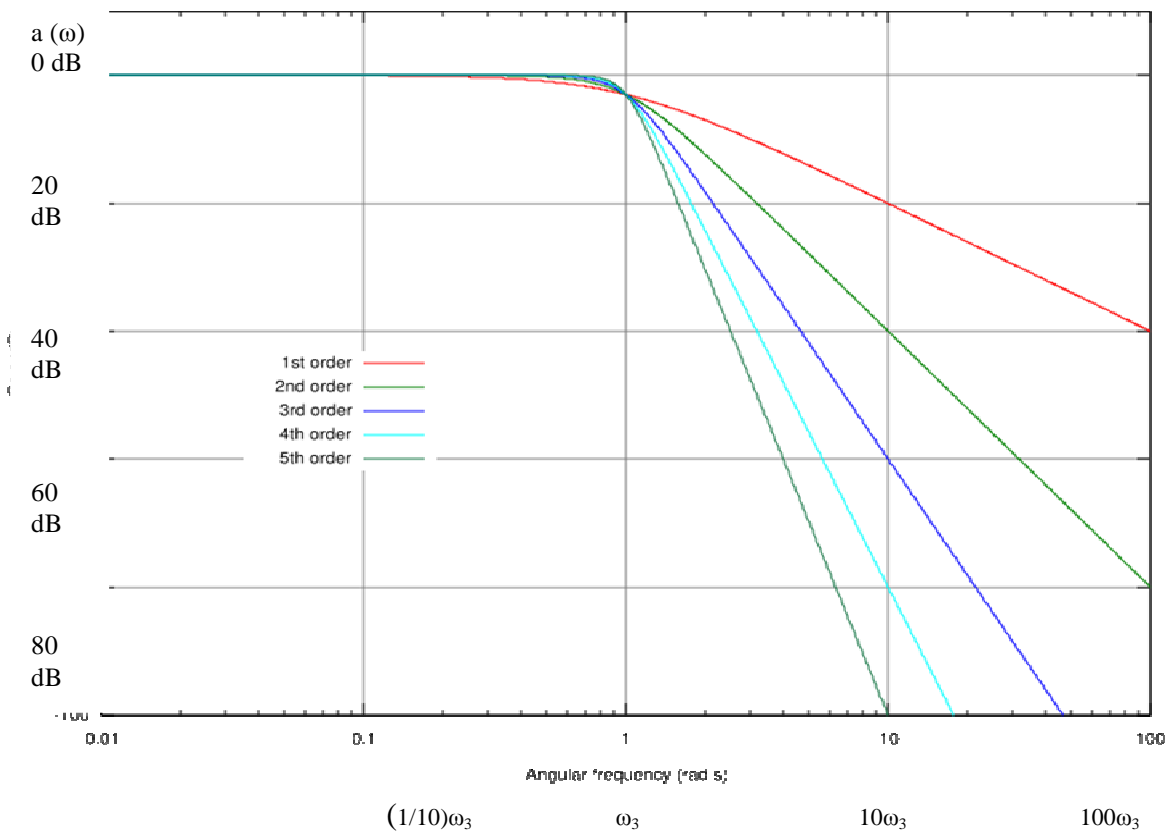
Fokszám	Komponens	Q	ζ , fok	a (ω) = -30 dB értékhez tartozó körfrekvencia, ω_3 -körfrekvenciára normálva (Ω -30 dB)	Átmeneti függvény késése, $1/\omega_3$ -időértékre normálva	Átmeneti függvény túllövése, %
1	1		0	31		
2	2	0,707	± 45	5,6	0,228	4,3
3	1 2	1	0 ± 60	3,1		
4	2 2	0,54 1,31	$\pm 22,5$ $\pm 67,5$	2,4	0,449	10,8
5	1 2 2	0,62 1,62	0 ± 36 ± 72	2		
6	2 2 2	0,52 0,71 1,93	± 15 ± 45 ± 75	1,8	0,663	14,3
+8 ¹⁰²				1,5	0,874	16,3

A kiváló amplitúdó karakterisztikához, az egyszerű tervezéshez nem túl jó fázisátvitel párosul, a Butterworth szűrők lineáris torzítását ez a körülmény határozza meg. Az átmeneti függvényre nemcsak a nagy túllövés, hanem már berezgés is jellemző, melynek amplitúdója 4. fokú szűrő esetén kb. 10 %, frekvenciája kb. megegyezik az egyes tagok önrezonanciájával. A berezgés egy periódus után elhanyagolható mértékűre csökken

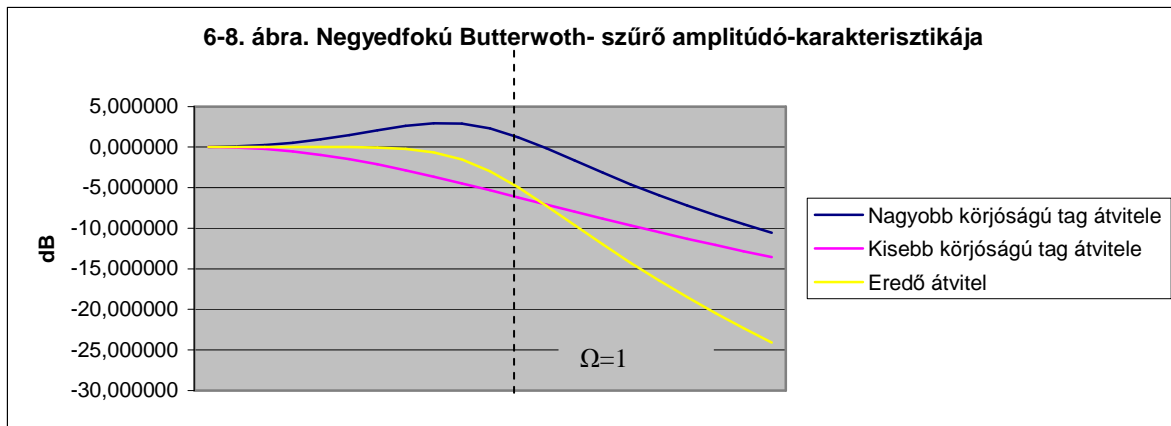
¹⁰² A nyolcadfokú szűrőkről csak a -30 dB-hez tartozó normált körfrekvenciát közöljük. A 4. másodfokú komponens paramétereinek kiszámításához ld. a következő oldalt.



6-6. ábra Butterworth-féle aluláteresztő szűrő pólusainak elhelyezkedése
a, páratlan, b, páros fokszám esetén



6-7. ábra. Különböző fokszámú Butterworth-szűrők amplitúdó-karakterisztikája



6.6. Csebysev-szűrők

A Csebysev-szűrő átviteli függvényének meghatározására Csebysev — hasonlóan Butterworth-höz — az amplitúdó-karakterisztikából indult ki. (A Csebysev-szűrők fáziskarakterisztikája még a Butterworth-szűrőknél is sokkal rosszabb, impulzus átvitelük nagyon rossz, de az alkalmazások nagy részében ez nem is játszik szerepet.)

A Csebysev-féle szűrők közös tulajdonsága, hogy — az átmeneti sáv leszűkítésére — az átviteli sávban megengedhető az $A(\omega)$ görbe ingadozása, bizonyos előre rögzített értékek között. Ezek az értékek páros fokszámú szűrő esetén (az egyenáramú átvitelt 0 dB-nek tekintve) +0,5, +1, vagy +3 dB, míg páratlan fokszám esetén -0,5, 1, vagy -3 dB. (6-10. ábra, a 155. oldalon)

Csebysev matematikus volt, a feladatot matematikai oldalról közelítette meg, a megoldás alapja az ún. $T(x)$ Csebysev-polinomrendszer.

Ezeknek a polinomoknak semmi köze nincs. a $\bar{K}(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)}$ komplex kifejezésben szereplő A, vagy B polinomokhoz, Csebysev csak az $A(\omega)$ amplitúdó-átviteli függvénnyel foglalkozott, és azokat egy adott „n” fokszám mellett az

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T(x)_n^2}} \quad (12)$$

egyenlettel határozta meg, ahol „k” az egyenáramú átvitel 0 dB értékét biztosítja, míg „ε” a sávon belüli ingadozást állítja be. (3 dB ingadozás mellett „ε” értéke 1.).

$x=1$ értéke annak a sávnak a határát adja meg, ahol az előírt ingadozás megvalósul. Páratlan fokszám mellett $x=1$ értéknek $A(\omega) - 3$ dB értéke felel meg, páros fokszám mellett az említett érték 0 dB. Mivel az Ω_3 értéknek megfelelő $A(\omega)$ érték -3 dB azonban -3 dB, így páros

fokszám mellett $x=1$ értékének $\Omega_3=\omega/\omega_3 < 1$ érték felel meg. (Páratlan fokszám esetén természetesen $x=\Omega_3$)

Ezek a polinomok legegyszerűbben a

$$T_{n+1}(x) = n[T_n(x)^2 - T_{n-1}(x)] \quad (13)$$

rekurzív egyenlettel képezhetők. $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, így $T_2(x) = 2x^2 - 1$, stb.

Noha Csebysev a problémát matematikai oldalról közelítette meg, igen érdekes a szűrő alkotóelemekből történő felépítésének fizikai megközelítése.

Ebből a célból a 6-12. ábrán (156. old.) megadtuk egy 4. fokú 3dB-es Csebysev-szűrő pólus-képét. Ebből azonnal látható, hogy ezek a szűrők miért biztosítanak igen szűk átmeneti tartományt. Bár a Butterworth-féle szűrőkhöz hasonlóan ebben az esetben is nagyobb és kisebb körjóságú tagokat kombinációjával találkozunk, most egyrészt a *nagyobb körjóságú tagok töréspontja* („ ω_0 ” értéke, betűknél maradva „ $1/q$ ” értéke) *magasabb az alacsonyabb körjóságú tagokénál*, (közülük is legalacsonyabb az elsőfokú tag σ értéke), másrészt *valamennyi tag ω_0 értéke kisebb, mint ω_3 , azaz $q > 1$* . (Kritikus csatolású szűrőknél és Bessel-szűrőknél $q < 1$, Butterworth-féle szűrőknél pedig $q = 1$) Elvonatkoztatva a Csebysev-szűrőket a puszta elmélettől, próbáljunk minden segédeszköz nélkül megtervezni egy másodfokú, 3 dB ingadozású szűrőt. Nem lesz túl nehéz.

Szűrőnk mindössze egy másodfokú alaptagból áll. Feladatunk az alaptag körjóságának, és a kívánt 3 dB körfrekvenciához képest a rezonancia-körfrekvencia meghatározását jelenti, s ezt a pólust majd. ábrázoljuk is egy ω_3 sugarú körben. 6-9. ábra, 154. old.)

Először a 3. fejezet (39) egyenlete (72. oldal) s a hozzátartozó (61) lábjegyzet alapján számítsuk ki a másodfokú tag körjóságát. Mivel a megengedett hullámosság 3 dB, az egyenlet baloldalára $A(\omega) = \sqrt{2}$ kerül:

$$\sqrt{2} = \frac{Q}{\sqrt{1 - 1/(4Q^2)}}, \text{ azaz}$$

$$Q = \sqrt{1 + 1/\sqrt{2}} \approx 1,31$$

a körjóságnak megfelelő ζ értéke:

$$\zeta = \arccos 1/2Q = 67,5 \text{ fok (Miért nem lepődtünk meg?)}$$

Az ennek megfelelő körfrekvencia értéke a 3. fejezet (37) egyenlete alapján számítható, figyelemmel a (60) számú lábjegyzetre is:

$$\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = 0,71\omega_0$$

„q” értékének számítása sem lehet probléma. „ ω_3 ” körfrekvencián a 3. fejezet 33.

egyenletének a reciproka: $1/\sqrt{2}$

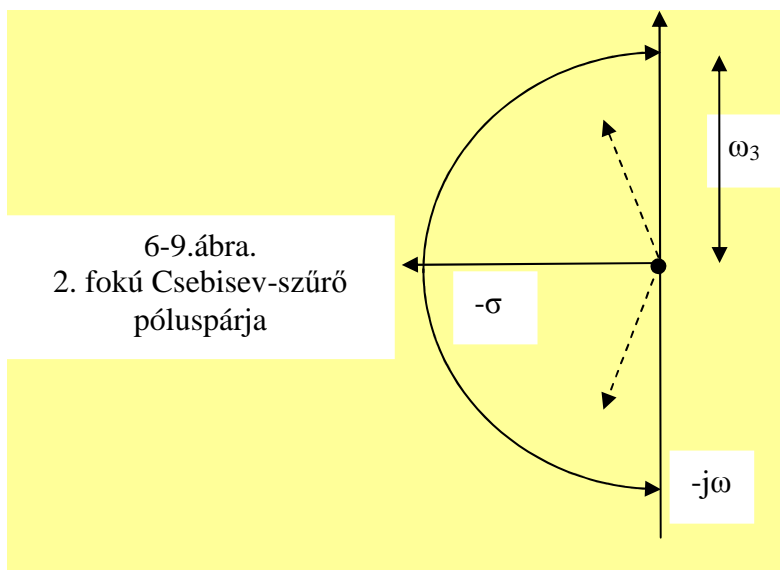
$$\sqrt{2} = 1 / \left[\left(1 - \frac{\omega_3^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega_3^2}{\omega_0^2 Q^2} \right]^{1/2}$$

$$q = \omega_3 / \omega_0 = 1,39;$$

a pólus távolsága az origótól egy $\omega_3 = 1$ sugarú körben:

$$l = 1/q = 0,72$$

$$\omega_{\max} = 0,71\omega_0 = 0,51\omega_3$$

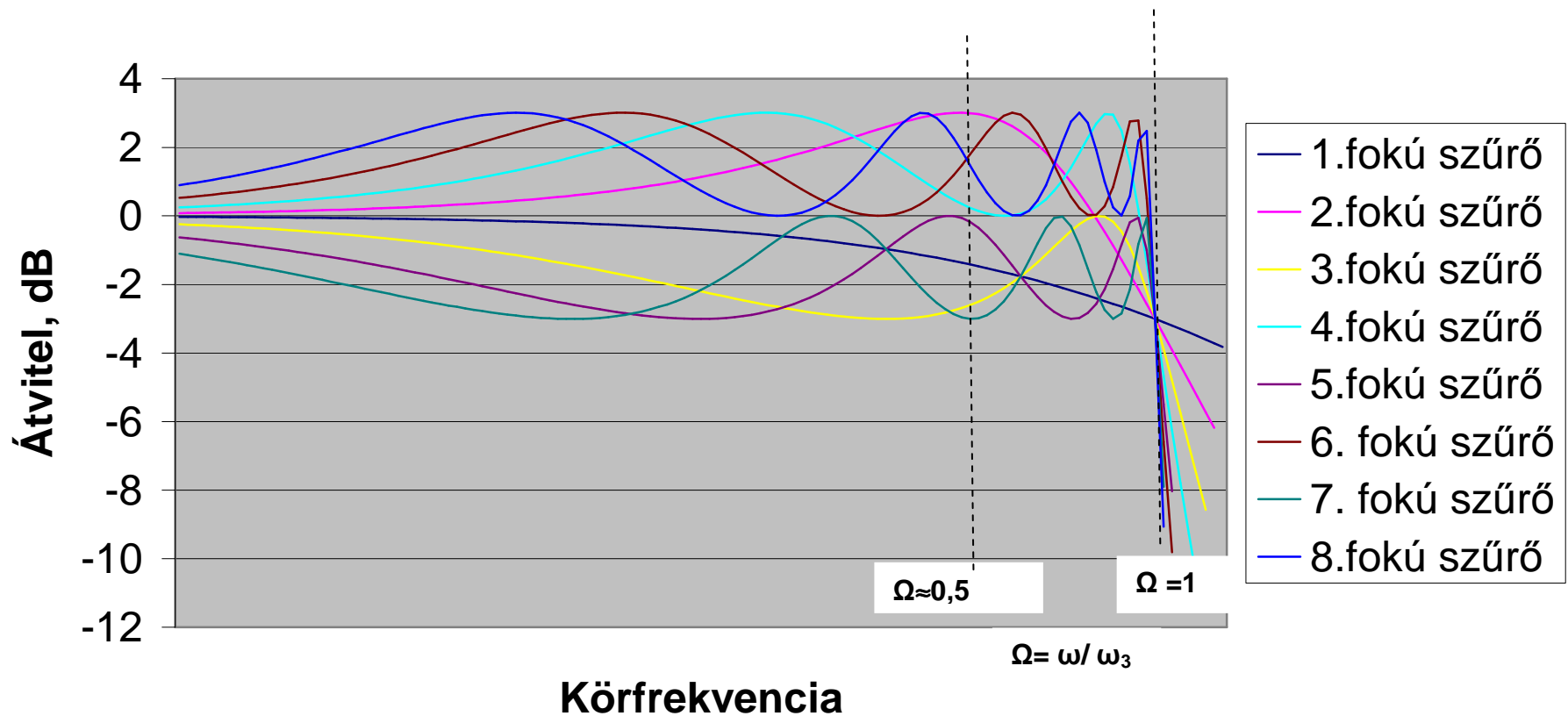


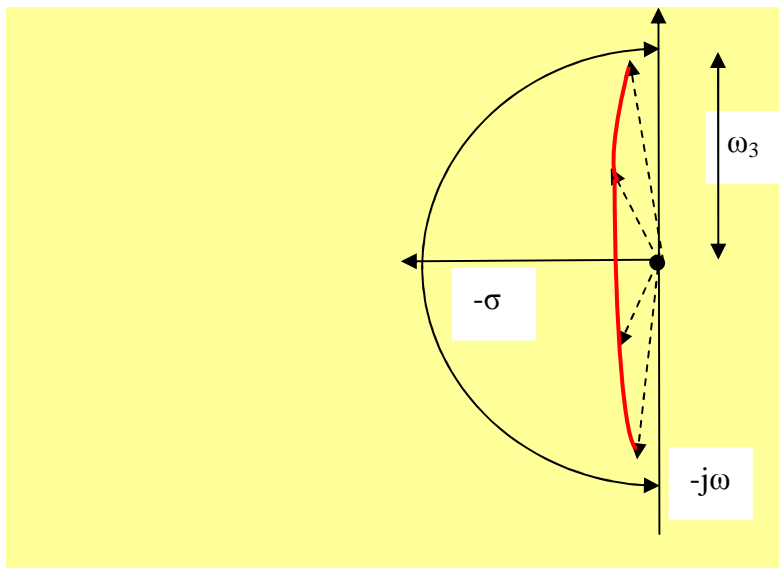
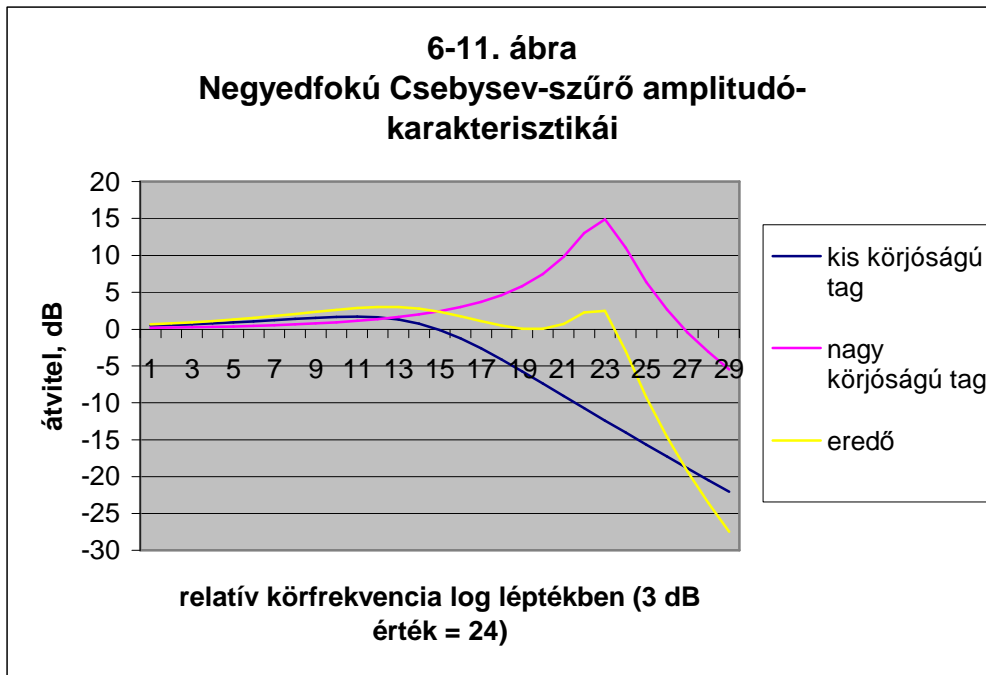
A 6-11. ábrán, 156. old.) ábrázoltuk a 3 dB hullámosságú, 4. fokú Csebysev szűrő $A(\omega)$ karakterisztikáit: mindkét tag átvitelét külön- külön, és a szűrő eredő átvitelét is. Mint említettük, az alacsonyabb körjóságú tagok rezonanciafrekvenciája alacsonyabb.

A 6-12. ábra (156. old.) a póluspárok elhelyezkedését mutatja be. *A póluspárok ellipszis-kerületen találhatóak, az ellipszis pedig az ω_3 sugarú körön belül helyezkedik el.*

Végül a 6-4. Táblázatban — az előző szűrőtípusokhoz hasonlóan — megadtuk a 3 dB-es Csebysev-szűrő méretezéséhez szükséges Q , és q paramétereket. Ezen kívül szerepeltettük az a pólusok elhelyezkedésére utaló geometriai paramétert (ξ), az átmeneti sáv szélességére utaló 30 dB-es relatív körfrekvencia (Ω_3) értéket, valamint — okulásul — a lényeges impulzustechnikai paramétereket is.

6-10. ábra. 3dB ingadozású Csebisev-szűrők
amplitudó-görbéi





6-12. ábra.
4. fokú Csebysev-szűrő
pólusai

6-4. Táblázat. 3 dB ingadozású Csebysev-szűrők alaptagjainak körjósága, a 3 dB-es körfrekvenci a pólusok elhelyezkedése, zárási paraméterei

Fok-szám	Komponens	Q	ζ fok	$q=\omega_3/\omega_0$ együtt- ható	$a(\omega) = -30$ dB értékhez tartozó körfrekvencia, ω_3 -körfrekvenciára normálva (Ω_3)	Átmeneti függvény késése, $1/\omega_3$ - időértékre normálva	Átmeneti függvény túllövése, %
1	1		0	1	31		
2	2	1,3	$\pm 67,4$	1,3894	4	0,271	27,2
3	1 2	3,07	0 $\pm 80,6$	3,3496 1,0919	2,1		

Fok-szám	Komponens	Q	ξ , fok	$q=\omega_3/\omega_0$ együtt-ható	a (ω) =-30 dB értékhez tartozó körfrekvencia, ω_3 -körfrekvenciára normálva (Ω_3)	Átmeneti függvény késése, $1/\omega_3$ -időértékre normálva	Átmeneti függvény túllövése, %
4	2 2	1,08 5,58	$\pm 62,4$ $\pm 84,9$	2,3524 1,0959	1,64	0,59	35,7
5	1 2 2	2,15 8,82	0 $\pm 76,6$ $\pm 86,8$	5,6334 1,6288 1,0337	1,36		
6	2 2 2	1,04 3,46 12,78	$\pm 61,2$ $\pm 81,7$ $\pm 87,8$	3,4172 1,4097 1,0422	1,27	0,0,912	38,7
7	1 2 2 2	1,98 5,02 17,46	0 $\pm 75,4$ $\pm 84,3$ $\pm 88,4$	7,9064 2,2128 1,2627 1,0173	1,18		
8	2 2 2 2	1,03 3,08 6,83 22,87	± 61 $\pm 80,7$ $\pm 85,8$ $\pm 88,7$	4,5050 1,7835 1,2045 1,0236	1,15	1,235	40,6

6.7. Felüláteresztő szűrők átviteli függvénye

Az aluláteresztő szűrők analitikájának ismerete azért is lényeges, mert az átviteli függvények ismeretében könnyebben át tudunk térni más típusú (felüláteresztő szűrő, sávszűrő, sávzáró szűrő) átviteli függvényének generálására. Helyszűke és humanitárius okok miatt némileg bővebben csak a felüláteresztő szűrők átviteli függvényének generálásával foglalkozunk.

A feladat a legkönnyebben a Bode-diagrammok segítségével közelíthető meg. Legyen valamely szűrőtag akár első- akár másodfokú, az aluláteresztő tag törtvonalas amplitúdó karakterisztikája $\omega \gg \omega_0$ esetében 6 dB/oktáv¹⁰³, ill. 12 dB/oktáv meredekséggel süllyed, s ez független a szűrőcsalád kiválasztásáról, legyen az kritikus csillapítású, vagy 3 dB-es Csebysev-szűrő.

Ha a meredekséget ebben a tartományban 0dB/oktáv-ra (vízszintes vonal) akarjuk csökkenteni, akkor a rendszerbe egy origóban elhelyezkedő zérust, vagy 2. fokú tag esetén 2 origóban elhelyezkedő zérust kell elhelyeznünk, ami +6/+12 dB oktáv meredekségű egyenes vonalat ad. A vonalnak a ω_0 pontban kell metszenie a 0 dB értéket, hogy a származtatott szűrő átvitele $\omega \gg \omega_0$ értékek mellett ugyanannyi legyen, mint a kiindulásunkat képező aluláteresztő szűrőtagé $\omega=0$ esetben. (6-13. ábra, 158. old.)

Fentiekből következik, hogy egy felüláteresztő másodfokú szűrő-alaptag amplitúdó karakterisztikáját úgy kapjuk meg, hogy az eredeti aluláteresztő tag átviteli függvényét

¹⁰³ A „6dB/oktáv” természetesen megegyezik a „20dB/dekád” irántangens-értékkel.

kiegészítjük origóban elhelyezkedő zérusokkal, melyek s/ω_0 alakot viselik (így biztosítható az ω tengely metszése az ω_0 pontban).

Ennek alapján a keresett átviteli függvény:

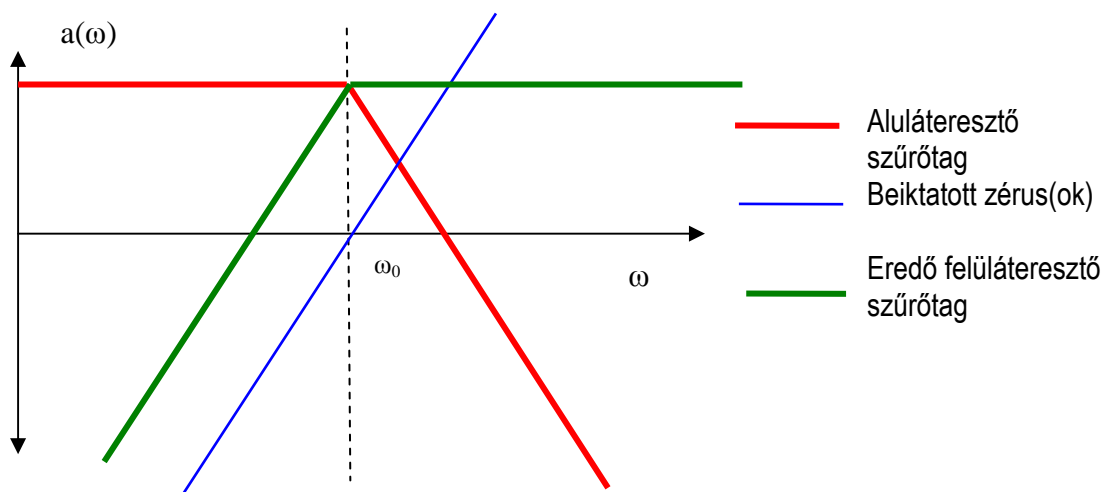
$$K(s) = \frac{s^2 / \omega_0^2}{1 + s\omega / \omega_0 Q + s^2 / \omega_0^2} \quad (14)$$

Aluláteresztő szűrő esetén érvényes a $\omega_0 = \omega_3/q$ összefüggés, ez feluláteresztő szűrő esetén logaritmikusan ω_3 -ra „tükröződik”, azaz $\omega_0 = 3\omega_3q$. Ha a szűrőtag átviteli függvényét a szűrő 3 dB-es pontjára vonatkoztatjuk, akkor

$$K(s) = \frac{s^2 / (\omega_3^2 q^2)}{1 + s\omega / (\omega_3 q Q) + s^2 / \omega_3^2 q^2} \quad (15)$$

A 15. egyenlet alkalmas arra, hogy ábrázoljuk a feluláteresztő másodfokú tag gyökeit a „ σ - $j\omega$ ” koordináta rendszerben. Az eltérés az ugyanilyen családnhoz tartozó, és ugyanilyen ω_3 határfrekvenciájú szűrőhöz tartozó másodfokú tagéhoz képest kettős:

a, megjelenik egy kettős zérus az origóban;



6-13. ábra. Feluláteresztő alaptag Bode-diagramjának létrehozása aluláteresztő tag diagramjának az origóban elhelyezkedő zérus(ok) diagramjával történő kiegészítésével

b, A konjugált komplex póluspontokat az origóval összekötő egyenes iránytangense nem változik (Q értéke ugyanaz), az origótól mért távolság viszont ω_0/q érték helyett ω_0q . Ez $q=1$ esetben ugyanaz (*Butterworth*; az egyes tagok pólusai ugyanolyan sugarú körön ugyanúgy helyezkednek el, mint az aluláteresztő esetben), viszont egyéb szűrőcsaládokénál markáns különbséget okoz. (kritikus csillapítású szűrőknél a pólusok a σ tengelyen helyezkednek el, de

az ω_3 sugarú körön belül; Bessel szűrők esetén a pólusok bekerülnek a kör belsejébe; leglátványosabb a változás a Csebysev szűrőknél. Ebben az esetben az aluláteresztő szűrőknél megismert körön belüli ellipszis (6-12. ábra) a 6-14. ábra szerinti vesegörbére módosul.)

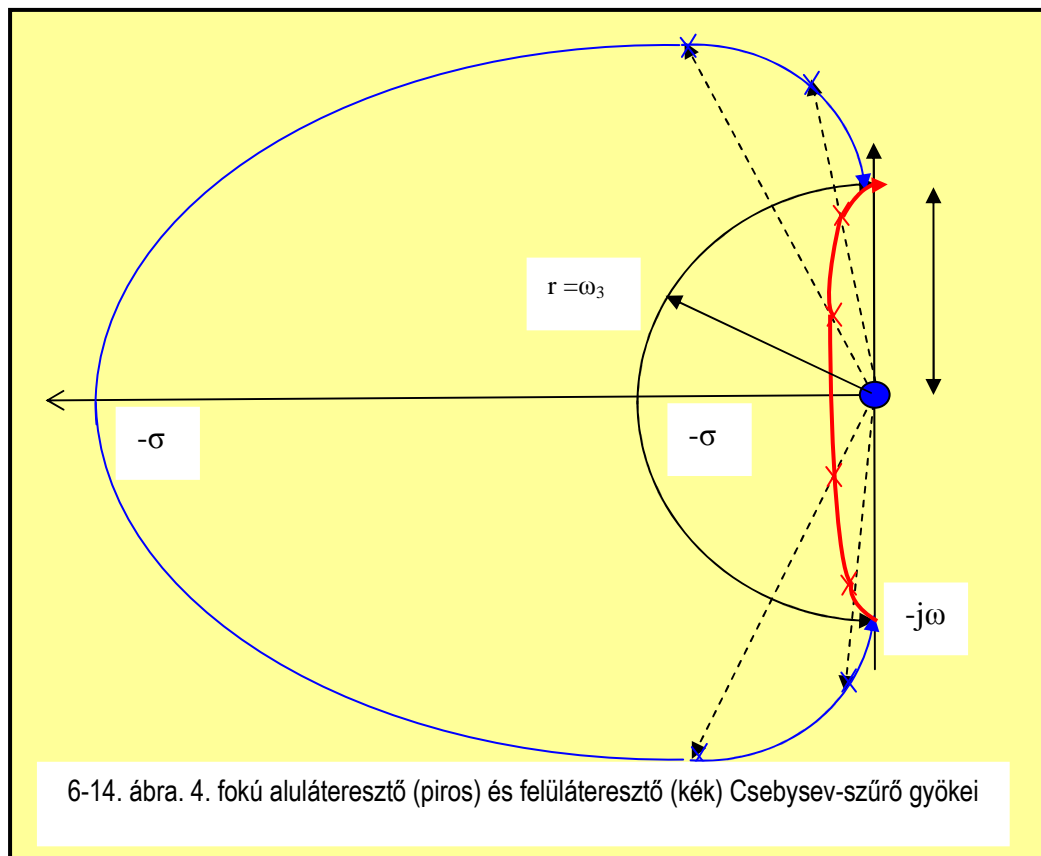
A (15) egyenlet igen alkalmas arra, hogy a származtatott feluláteresztő szűrők gyökjeinek elhelyezkedését ábrázolni tudjuk, a teljes szűrő $K(s)$ egyenletének generálása viszont jóval egyszerűbb módon is lehetséges. Ehhez csak arra van szükség, hogy a (15) egyenletben a számlálót leredukáljuk:

Ismét bevezetve az $S = s/\omega_3$ változót:

$$\bar{K}(S) = \frac{1}{1 + (1/S)q/Q + (1/S)^2 q^2} \quad (16) \text{ NB}$$

A másodfokú tag származtatott $K(S)$ függvénye teljesen megegyezik az eredetivel, ha az „ S ” változót „ $1/S$ ” változóra cserélünk. Ugyanez a helyzet a teljes szűrő $K(S)$, illetve $\bar{K}(j\Omega)$, vagy akár az $A(\Omega)$ függvénnyel is. Példaképpen az „ n ” fokszámú Butterworth-szűrő amplitúdó karakterisztikája:

$$A(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (1/\Omega^{2n})}} \quad (17) \text{ NB}$$



6.8. Sávszűrők átviteli függvényének származtatása az aluláteresztő szűrő átviteli függvényéből

A sávszűrők származtatása nem nehéz feladat, (megvalósítása azonban már kissé nehezebb).

Aluláteresztő szűrő esetén az S normalizált változó alapját a $j\Omega$ képzetes Fourier-változó képezi, amely azt mutatja, hogy az adott körfrekvencia hogyan aránylik a szűrő 3 dB-es csillapítású ω_3 értékéhez, „milyen közel van a sávhatárhoz”.

Sávszűrő esetén az aluláteresztő szűrőparamétereikhez képest (Sávszélesség, sávon belüli amplitúdó/fázisátvitel, átmeneti sáv, jelelnyomás a zárási sávon belül, stb.) egy új paraméter lép be: a sávközépi frekvencia, vagy körfrekvencia, jelölése ω_c

A normalizált körfrekvencia ($\Omega = \omega/\omega_3$) szerepét a *relatív elhangolás*, η tölti be. Ez egy viszonyszám, mely arra utal, hogy a kérdéses körfrekvencia a 3 dB-es sávhatárokhoz képest milyen relatív értéket vesz fel. Ha a sávközépen vagyunk, értéke η értéke 0, a „felső” sávhatáron η értéke 1, az „alsó” határon η értéke -1.

Amennyiben a sávszélesség kicsi, könnyen képezhetjük ezt az értéket: célszerű az aktuális körfrekvencia, ω és a sávközép körfrekvenciája ω_c különbségét képezni, és ezt osztani a sávszűrő 3 dB-es ω értékei különbségének a felével.

Kisebb ($Q < 10$) körjóság esetén ez a módszer nem jó, mert az elhangolás mértéke valóban az adott körfrekvencia és a középponti körfrekvencia arányától függ, az alábbi formula szerint:

$$\eta = \frac{(\Omega) - (1/\Omega)}{\Delta\Omega} \quad (18)$$

Valóban a sávszűrők átviteli görbéje a középponti frekvenciára akkor szimmetrikus, ha a körfrekvenciát logaritmikusan ábrázoljuk, egyébként pedig a középponti körfrekvenciához képest növekvő körfrekvenciák irányába a görbe lankás, míg a csökkenő irányban meredekebben esik.

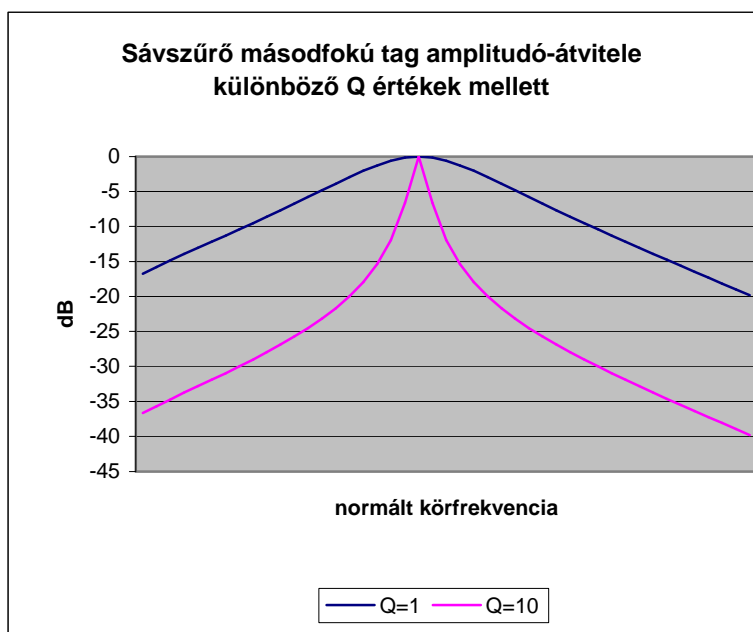
Sávszűrők sávszélessége (az átviteli sáv szélessége) két körfrekvencia, az ω_{\max} (normálva: $\Omega_{\max} = \omega_{\max}/\omega_c$) és az ω_{\min} (Ω_{\min}) különbsége. Másodfokú szűrő-alaptagra, amennyiben az átviteli sáv határait 3 dB csillapításra vesszük fel (ez a szokott érték) a normált határ-körfrekvenciákra az alábbi összefüggés írható fel:

$$\Omega_{\max} = \sqrt{1 + 1/(4Q^2)} + 1/(2Q) \quad \Omega_{\min} = \sqrt{1 + 1/(4Q^2)} - 1/(2Q) \quad (19)$$

A két érték különbsége ($\Delta\Omega$) pontosan $1/Q$, mértani középértékük pedig 1.

A középponti frekvencia és a 3 dB-es sávszélesség aránya ($\Delta\Omega$) másodfokú tag esetén mindig (még kis értékeknél is) a Q körjóság értékének reciproka.

Ez a másodfokú tag igen nagy Ω értékek mellett 6 dB/oktáv¹⁰⁴ meredekséggel zuhan. A kis Ω értékek esetén a 6 dB/oktáv érték csak nagy Q értékek mellett mérhető. Amennyiben a vízszintes tengelyre nem „log Ω ” értékét, hanem „log η ” értékét vesszük fel, úgy a görbe meredeksége 6 dB/oktáv, mert erre a változóra nézve a görbe megfelel egy elsőfokú aluláteresztő tagnak, η értékét „ Ω ”-ra helyettesítve.



6-15. ábra

Áttérve a képzetes, majd a komplex normált változókra ($j\Omega$, ill. S) azt kapjuk, hogy az aluláteresztő szűrő „ S ” ω_3 -ra normált változóját $S' = \frac{1+1/S}{\Delta\Omega}$ -re kell cserélnünk.

Csak felületesen nézzük meg, hogy egy elsőfokú aluláteresztő tag átviteli függvénye milyen módon alakul át, ha sávszűrő-transzformációt végzünk:

$$\bar{K}(S) = \frac{1}{1+S'} = \frac{1}{1+\frac{S+1/S}{\Delta\Omega}} = \frac{\Delta\Omega S}{1+\Delta\Omega S+S^2} \quad (20)$$

Ennek a függvénynek, ami eredetileg elsőfokú tag függvénye volt, máris konjugált komplex ($\Delta\Omega < 2$), vagy valós tengelyen található póluspárja, ($\Delta\Omega > 2$), illetve dupla pólusa ($\Delta\Omega = 2$), és egyetlen origón található zérusa van. Ez egy másodfokú tag, $K(S) = \frac{S/Q}{1+S/Q+S^2}$

¹⁰⁴ A „6dB/oktáv” természetesen megegyezik a „20dB/dekád iránytangens-értékkel.”

Sávközépen $j\Omega$ értéke 1, $\bar{K}(j\Omega)$ értéke szintén, 1, valós, .

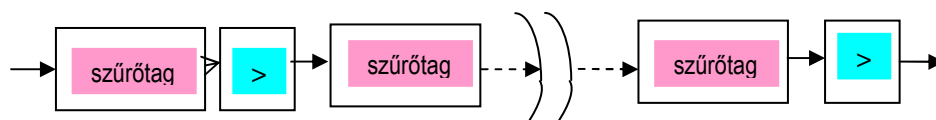
Kaszád sávszűrők csak másodfokú tagból épülhetnek fel, elsőfokú sávszűrő tag nem létezik.

6.9. Kaszád és aktív szűrők szintézise

6.9.1. Kaszád szűrők¹⁰⁵

A szűrő átviteli függvényét általában nem egyetlen „n” fokozatú szűrőhálózat, hanem 1. és 2. fokú alaptagokat tartalmazó hálózatok kaszád láncolata valósítja meg. Lényeges, hogy a különböző tagok ne hassanak egymásra, ezért ezeket elvileg végtelen nagy bemenő impedanciájú., visszahatásmentes, és 0 kimenő impedanciájú elemekkel (buffer) választjuk el egymástól. Ezek a tagok természetesen aktív hálózatok, mi azonban most ezeket egyszerű négyfókusként ábrázoljuk, már most megjegyezve, hogy ezek a négyfókusok a 2.2.2. pontban említett „aktív áramköri elemek” közül a 2. fejezet 2-2a ábráján is látható feszültségvezérelt feszültséggenerátorok, melyek feszültségerősítése, „D” – ha egyéb kikötést nem teszünk – legyen 1.

Elválasztó tagként általános esetben célszerű visszacsatolt műveleti erősítőt használni, NINV kapcsolásban. Régebben népszerű volt a tranzistoros CC kapcsolás is. Lényeges, hogy az elválasztó tag átviteli karakterisztikája mind az átviteli, mind pedig a zárósávban „ideális” legyen. (Az átviteli sávban ne okozzon járulékos frekvenciafüggő csillapítást, a zárósávban pedig ne jelentkezzenek jel-visszaverődési, vagy esetleg „váratlan” erősítési problémák.”



6-16. ábra Passzív szűrőtagokból felépített . Kaszád szűrő

Lényeges kérdés, hogy milyen sorrendben kötjük kaszádba ezeket a passzív hálózatokat. Ez elvileg lényegtelen, gyakorlatilag azonban — elkerülhető túlvezérlés elkerülésére — célszerű az elemeket növekvő ω_0 , majd növekvő körjóság szerint sorakoztatni: A rendszert célszerű elsőfokú taggal kezdeni, majd következnek a másodfokú tagok.

¹⁰⁵ A 6.16. ábrán látható kaszád szűrőt – mivel aktív tagokat is tartalmaz – gyakran az aktív szűrők közé sorolják.

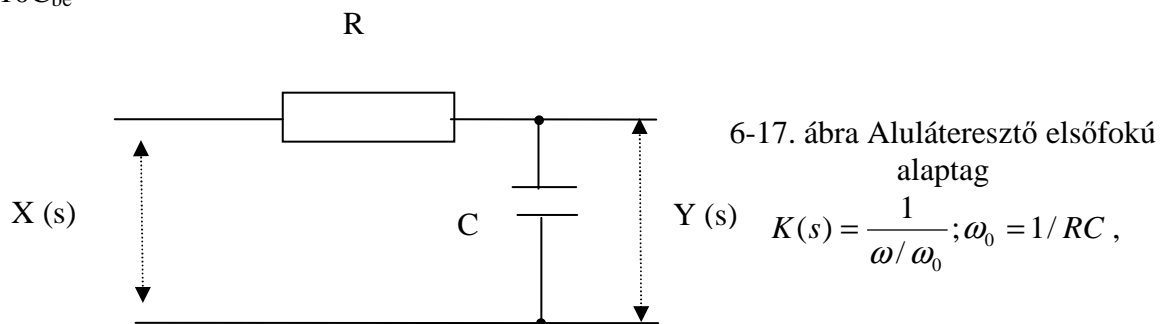
Az elsőfokú tagok (6-17. ábra.) tervezésekor csak egyetlen paraméterünk van – az ω_0 törési körfrekvencia, melynek a tag RC szorzata felel meg. A szorzat birtokában az R és C felvételekor figyeljünk az alábbiakra:

Aluláteresztő szűrőtag esetén R értéke legalább a meghajtó generátor belső ellenállásának tízszerese legyen, de ne legyen több, mint a kimeneti elválasztó tag bemenő ellenállásának (a bemenő impedancia párhuzamos modellezésénél az „ R_{be} ” értéke) tizede;

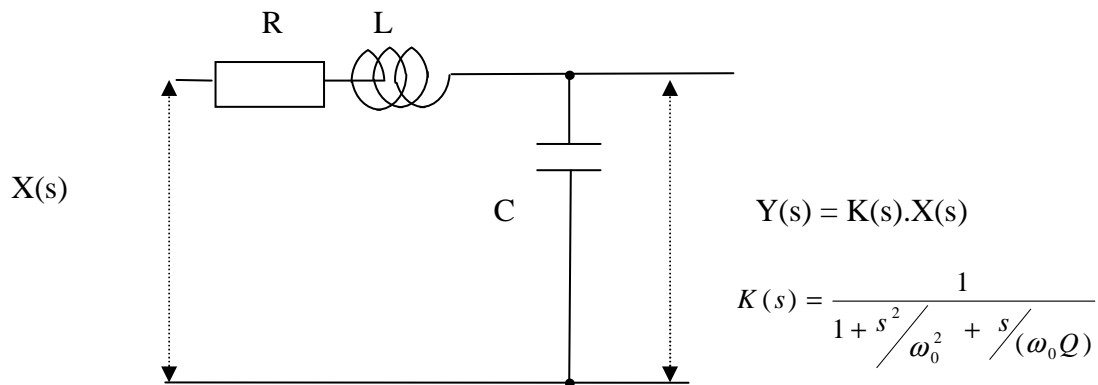
$$10R_g < R < R_{be}/10$$

C értéke ne legyen kevesebb, mint a kimeneti elválasztó tag bemenő kapacitásának a tízszerese.

$$C > 10C_{be}$$



Aluláteresztő másodfokú passzív tag (6-18. ábra) tervezésénél már sokkal több szempontot kell figyelembe vennünk



6-18. ábra Másodfokú passzív aluláteresztő tag

A kiindulási adataink a tag körjósága (Q_i) és a törésponti frekvencia (ω_{0i})

Ha ω_{0i} értéke nem túl magas, a körjóságra kell tervezni. Szerencsére magas Q_i -val rendelkező tagok a lánc belsejében, ill. végén helyezkednek el, ezzel együtt az R értékét célszerű min. 100Ω körüli értékre választani. (Ne feledjük el, hogy a tekercs vesztesége ebben bennefoglaltatik). C értékét meghatározza a $Q\omega_0 = 1/RC$ összefüggés.).

Nagy ω_0 értékek mellett már lényeges lehet magának az elválasztó tagnak a kiválasztása, ezt most ugorjuk át. C értékét $C > 10 C_{be}$ megfontolások alapján válasszuk ki, ezt kövesse L értéke ω_{0i} alapján ($\omega_{0i} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$), majd R értékét a már említett $Q_{\omega 0} = 1/RC$ egyenlet határozza meg.

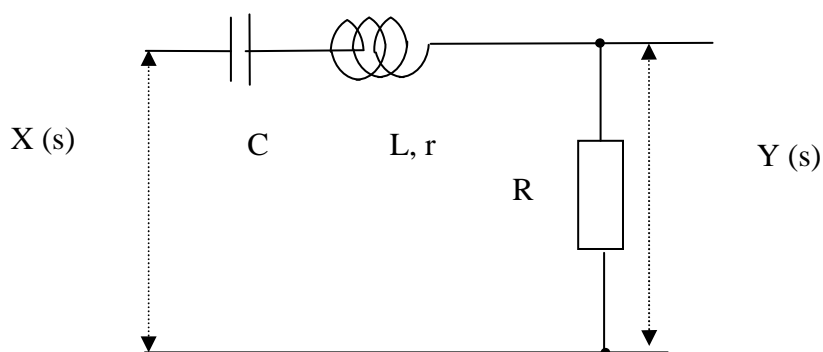
Aluláteresztő szűrőknél 8-fokú rendszer esetében a legmagasabb körjóságú tagnál Q értéke kb. 23, (Csebysev, 3 dB), más szűrőcsaládok, kisebb fokszámú szűrő, vagy alacsonyabb számú másodfokú alaptag esetében ennél jóval kisebb körjóságot kell beállítanunk (Butterworth 8 fokú rendszerénél a 4. számú másodfokú tag esetén $Q = 2, 56$, stb.).

Miután a kaszkád szűrők passzív (LRC) tagok esetén is tartalmaznak aktív elválasztó tagokat, egyszerűség kedvéért ezeket is aktív szűrőknek nevezzük.

A passzív tagokból és aktív elválasztókból álló rendszer blokk-sémáját a 6-16. ábra mutatja. (162. oldal.)

Másodfokú sávszűrő alaptag kapcsolását a 6-19. ábra mutatja. A kapcsolás nem mutatja a tekercs veszteségéből adódó „r” járulékos ellenállást, ami nemcsak a körjóság értékét csökkenti (A kimeneti R ellenállással együtt), hanem némileg betorzítja a 6-12. ábra átvitelét is: A középponti frekvencia felett az amplitúdó-átvitel nem Q értékhez („-∞” dB), hanem véges r/R értékhez, ennek megfelelő véges dB értékhez tart.

Mivel minden szűrő gyenge pontja a tekercs (ennek okait a passzív áramkörök c. tantárgyban alaposan megismerhetjük), így jogosan vetődik fel az a kérdés, hogy ha már aktív tagokat is felhasználnunk, nem volna-e egyszerűbb az elválasztó tagokat a szűrő részeként is felhasználva olyan tagokat létrehozni, melyek nem tartalmaznak induktivitást?. A választ az *aktív szűrő-alaptagok* kapcsolása adja meg.



6-19. ábra. Másodfokú sávszűrő-alaptag

6.9.2. Aktív szűrő-alaptagok

Az aktív szűrő-alaptagok RC és aktív elemeket (feszültségvezérelt feszültség generátorokat, műveleti erősítőket) tartalmazó aktív hálózat segítségével realizálják a másodfokú és harmadfokú tagokat. (A harmadfokú tag átviteli függvénye egy elsőfokú és egy másodfokú tag átviteli függvényének szorzata). *Legegyszerűbb esetben az aktív szűrő-alaptagokra az aktív elem valamely RC taggal történő áthidalása jellemző oly módon, hogy az aktív elem bemenetén található RC hálózat valamely belső pontját, vagy pontjait az aktív elem kimenetével kötik össze egy vagy több RC elem beiktatásával.*

Amennyiben aktív elemként műveleti erősítőt használunk, a bemeneti hálózat a műveleti erősítő mindkét bemenetét vezérelheti.

Bonyolultabb esetekben egyetlen másod- vagy harmadfokú alaptag megvalósításában több műveleti erősítőt is alkalmazunk.

Az aktív szűrő alaptagok kapcsolásai közül a legegyszerűbb, és legnépszerűbb a Sallen-Key-féle kapcsolás¹⁰⁶. A kapcsolás aszimmetrikus aktív elemmel is működik, rendszerint azonban műveleti erősítőt használunk NINV kapcsolásban. Az áramkör működése az ún. *Miller effektuson* alapul.¹⁰⁷

A Miller effektus azt vizsgálja, hogy milyen hatással van valamilyen U-U (feszültségvezérelt feszültséggenerátor) erősítő elem Z impedanciával történő áthidalása az erősítő bemeneti viszonyaira. Frekvencia- vagy komplex-frekvencia-változó szerint eljárva azt tapasztaljuk, hogy — mivel az U-U elem kimenő impedanciája 0 — a Z (s) vagy Z(j ω) érték (egy kondenzátor esetén 1/sC, vagy 1/j ω C) átszámítható az erősítő bemenete és a közös vonatkoztatási pont („föld) közé kapcsolt Z_{eq} értéké (6-17. ábra) az alábbiak szerint:

$$Z_{eq}(s) = \frac{Z(s)}{1 - A(s)} \quad (21) \quad \mathcal{NB}$$

Ebben az egyenletben A(s) valós komponense természetesen lehet pozitív, vagy negatív is.

Néhány példával illusztrálható a Miller effektus:

(1) Legyen az erősítő elem erősítése frekvenciafüggetlen (!) és negatív előjelű. Ekkor egy C áthidaló kapacitás a bemenetre $1 + |D|$ értékkel felszorozva számítandó át.

¹⁰⁶ A kapcsolást R.P. Sallen és E.L. Key dolgozta ki 1955-ben a MIT un. Lincoln laboratóriumában, melyet 1950-ben alapítottak kifejezetten védelmi célú berendezések kidolgozására.

¹⁰⁷ Az aktív szűrők működését általában az ún. „áthidalt T” kapcsolással tárgyalják, de ebben az esetben a működés jobban megérthető (és egyszerűbben levezethető) a Miller effektus szerint.

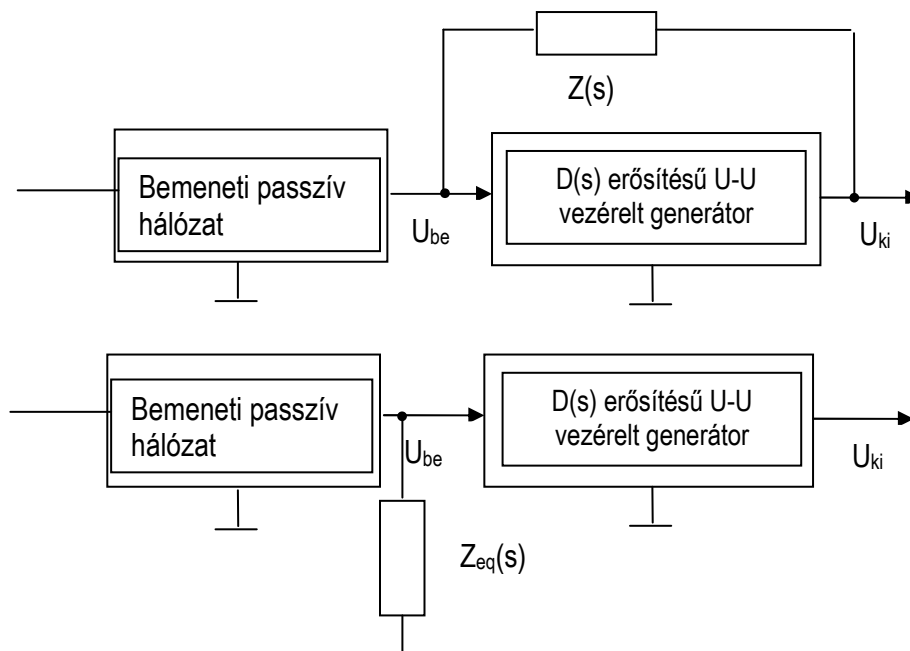
(2) Legyen az erősítő elem erősítése ismét frekvenciafüggetlen, és +1. Ekkor az áthidaló elem hatása zérus, a bemenetre végtelen nagy impedanciával számítható át. Ez józan paraszti ésszel is belátható: Egyenlő potenciálú pontokat összekötő ágban nem folyik áram. (pl. Wheatstone-híd)

(3) Legyen az áthidaló elem erősítése $D = \frac{1}{1 + s\tau}$.

Ekkor az átszámított $Z(s)$ elem két sorba kapcsolt elemmel modellezhető: $Z_{eq}(s) = Z(s) \frac{1 + s\tau}{s\tau}$

Ha az áthidaló elem („veszteségnélküli”) C kondenzátor, melynek s transzformáltja $Z=1/sC$, akkor

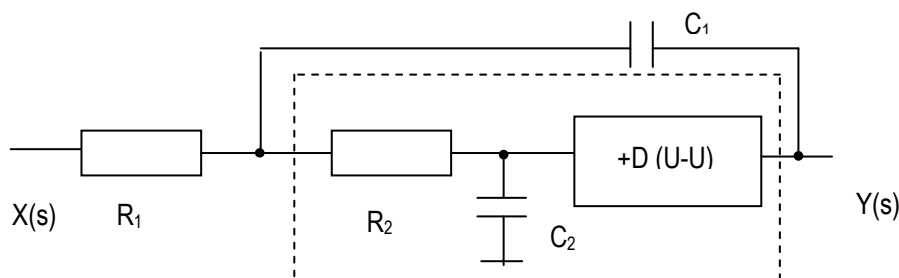
$$Z_{eq}(s) = \frac{1 + s\tau}{sC(s\tau)} = \frac{1 + s\tau}{s^2 C\tau} \quad (22)$$



6-20. ábra. A Miller effektus szemléltetése:

Felső ábra: az eredeti kapcsolás. Alsó ábra: az ekvivalens kapcsolás

A Sallen- Key aktív másodfokú aluláteresztő tag általános kapcsolása a 6-21. ábrán látható.¹⁰⁸



¹⁰⁸ A szűrő egyik gyakori áramköri kivitelezését a 6.23. ábra mutatja.

6-21. ábra Aluláteresztő másodfokú Sallen-Key szűrőtag

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\tau_1 = R_1 C_1 \quad \tau_2 = R_2 C_2 \quad \text{valamint} \quad \gamma = R_1 / R_2 \quad (22a)$$

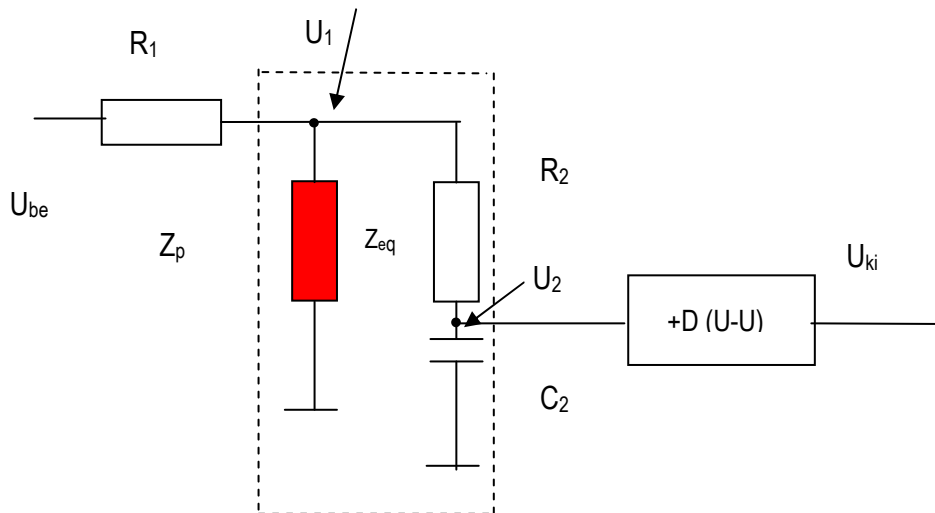
Tekintsük U-U elemként a szaggatott négyszögbe foglalát hálózatot (a bemenő impedancia nem ∞ , de ennek semmi jelentősége nincs). A négypólus $Y(s)/Z(s)$ átviteli függvénye

$$D(s) = D/(1+s\tau_2),$$

Mivel $D = 1$, (magának az erősítőnek az átviteli függvényét az átviteli sávban tekintjük valósnak

$$D(s) = 1/1+s\tau_2$$

A Miller-effektus figyelembevételével a hálózat az alábbiak szerint rajzolható át:



6-22. ábra. A Sallen-Key szűrő átrajzolása a Miller-effektus figyelembevételével

Az U_1 pont és a föld közötti impedanciát Z_p -vel jelöljük, ez két impedancia párhuzamos kapcsolásából jön létre, az egyik impedancia —a Z_{eq} kétpólus— s transzformáltja a (19) szerint

$$Z_{eq}(s) = \frac{1+s\tau_2}{sC_1(s\tau_2)} = \frac{1+s\tau_2}{s^2C_1\tau_2} = R_1 \frac{1+s\tau_2}{s^2\tau_1\tau_2} = \gamma R_2 \frac{1+s\tau_2}{s^2\tau_1\tau_2},$$

a másik impedancia „ s ” transzformáltja: $Z_2(s) = R_2 + 1/sC_2 = R_2 \frac{1+s\tau_2}{s\tau_2}$

A két impedancia párhuzamos eredőjének s transzformáltja:

$$Z_p(s) = R_2 \gamma \frac{1 + s \tau_2}{\gamma s \tau_2 + s^2 \tau_1 \tau_2}$$

A szűrőtag teljes átviteli függvénye $K(s)$:

$$K(s) = \frac{1}{[1 + R_1 / Z_p(s)](1 + s \tau_2)}$$

$Z_p(s)$ behelyettesítése után kapjuk a fontos végeredményt:

$$K(s) = \frac{1}{1 + s \tau_2 (1 + \gamma) + s^2 \tau_1 \tau_2} \quad (23)$$

Fentieket összevetve a passzív másodfokú tag átviteli függvényével (3.. fejezet, 19a), azt kapjuk, hogy

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}, \dots \dots \dots Q = \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}} \left(\frac{1}{1 + \gamma} \right) \quad (24) \text{ NB}$$

$R_1 = R_2 = R$, $C_1 = C_2 = C$ mellett Q értéke $1/2$, azaz a kritikus csillapítású szűrőtagot kapjuk,

Fentiekből látható. Hogy $D=1$ érték mellett magasabb körjóság elérése nehézségekbe ütközhet. $Q=30$ értéket (Csebysev, vagy magasabb fokú 3dB-es szűrőnél elképzelhető) pl. $R_1 = R_2$ értékválasztás mellett $C_1 = 3600 C_2$ értékválasztás mellett kaphatunk. Mivel C_2 értékét 100-200 pF-nél kisebbre semmiképp sem szabad választani, így C_1 értéke igen nagyra adódik. Mivel R_1 értéke is alulról korlátos, azaz nem lehet kisebb, mint a meghajtó generátor belső ellenállása értékének kb. 4-5-szöröse, magas ω_0 értékek realizálása nagy Q mellett nem könnyű feladat.

Fenti problémát a $D > 1$ választás oldhatja meg. Ebben az esetben az átviteli függvény értéke:

$$\bar{K}(s) = \frac{D}{1 + s[(1 + \gamma)\tau_2 - (D - 1)\tau_1] + s^2 \tau_1 \tau_2} \quad (25)$$

Látható, hogy R és C értékét változatlanul hagyva $D > 1$ mellett ω_0 értéke nem változik, A körjóság viszont az eredeti értékhez képest megnő:

$$Q = \frac{Q_{D=1}}{1 - (D - 1)(1 + \gamma)Q_{D=1}^2}$$

R és C egyenlőségeket választva ($Q_{D=1} = 1/2$)

$$Q = \frac{1/2}{1 - (D - 1)(1 + 1)(1/4)} = \frac{1}{3 - D} \quad (26)$$

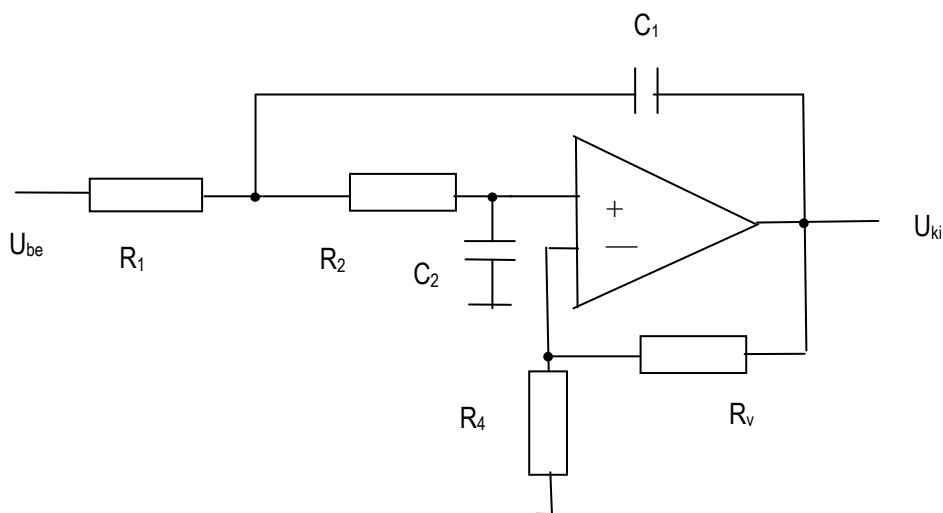
közismert értéket kapjuk. $D = 3$ esetben a körjóság elvileg végtelen (mivel az erősítő nem ideális, szerencsére nem az, de a rendszer túlvezérelődhet), de a $D=3$ értéket megközelítve azt

tapasztaljuk, hogy ilyen RC értékek mellett D változtatásával (l.o.) a körjóságot anélkül tudjuk változtatni, hogy a törésponti frekvencia értéke változna.

A tárgyalt szűrőtagnak tehát két nagy előnye van:

- A törésponti frekvencia értékét a 4 RC tag értékszorzatának a gyöke határozza meg (mértani közép), kevéssé függ az egyes elemek értékingadozásától, elvileg független az aktív tag erősítésétől;
- A körjóságot az aktív tag erősítése is befolyásolja, így RC ω_0 -ra történő behangolása után az erősítés változtatásával állítható be, elég széles határok között.

A 6-23. ábra a szűrő leggyakoribb áramkörü megvalósítását mutatja. A feszültségvezérelt feszültséggenerátor szerepét NINV kapcsolásban működő visszacsatolt műveleti erősítő látja el. A „D” erősítés beállítására az R_v és R_4 ellenállások szolgálnak. A rendszer tervezésekor különös figyelmet kell fordítanunk a visszacsatolt műveleti erősítő „1+H” értékére. (6.7.3.pont)



6-23. ábra.

A Sallen-Key másodfokú aluláteresztő szűrőtag. leggyakoribb megvalósítása ($D=1+(R_v/R_4)$)

Megemlítjük, hogy feluláteresztő másodfokú Sallen-Key szűrőtag az aluláteresztő másodfokú tagból az R és C elemek helycseréjével nyerhető.

Aktív másodfokú sávszűrőtag kapcsolása az alul- és a feluláteresztő Sallen-Key-féle kapcsolás kombinációjával jön létre. (6-21. ábra)

Az áramkör hasonlít a feluláteresztő megfelelő tagra, de a bemenetén soros kondenzátor helyett integráló RC tag található.

A hálózat átviteli függvényét ismét a Miller-effektus alkalmazásával számíthatjuk ki., a 6-19. ábra jelölései szerint.

Az eredményt ismét összevetve a 3. fejezet 19a egyenletével, kapjuk hogy:

1, A szűrőtag középponti körfrekvenciája:

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \quad (27)$$

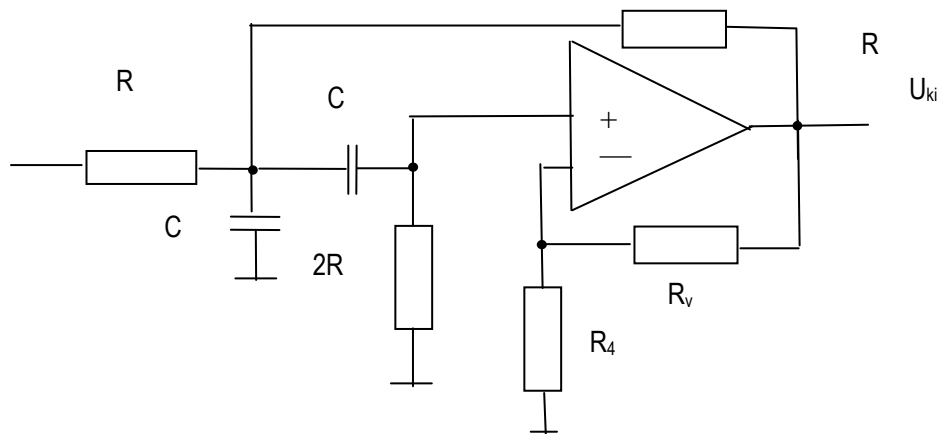
2, A szűrőtag körjósága:

$$Q = \frac{1}{3-D} \quad (28)$$

3, A szűrőtag feszültségerősítése a középponti frekvencián:

$$A_c = DQ \quad (29)$$

Vegyük észre, hogy nagy Q értékek esetén nagy az áramkör erősítése is a középponti frekvencián.



6-24. ábra Aktív Sallen-Key másodfokú sávszűrőtag

Az egyéb aktív szűrőkapcsolások közül kiemelnénk a világon széles körben alkalmazott *Scultéty-féle*¹⁰⁹ kapcsolást. A szűrő az általunk nem tárgyalt *elliptikus-közelítést* valósítja meg.

6.10. Példa aluláteresztő szűrő tervezésére (analízis és szintézis)

Kiindulási értékek:

1. A szűrő 0 Rad/sec körfrekvencián mért értékhez viszonyított relatív csillapítása az átviteli sávban, 0—10 kRad/sec körfrekvencia-tartományban nem lehet több, mint 1 dB ($a_{0\text{max}} > -1$ dB),

¹⁰⁹ Dr. Scultéty László (1928-) a műszaki tudományok doktora, c. egyetemi tanár. 80. születésnapjának tiszteletére a BME központi épületének dísztermében 2008. szeptember 12.-én ünnepséget rendezett. Nevéhez az aktív lineáris hálózatok területén végzett jelentős felfedezéseken kívül orvosi műszer- és farmakológiai kutatások fűződnek.

2. Az 1. pontban hivatkozott paraméter értéke a zárótartományban, azaz az 50kRad/sec körfrekvenciát meghaladó ω értékek esetén nem lehet kevesebb, mint 40 dB ($a_{\omega_{zmin}} < -40\text{dB}$)¹¹⁰
3. A szűrő $A(\omega)$ amplitúdó-karakterisztikájának monoton csökkenőnek kell lennie.

Fenti követelményeket a Butterworth-szűrő elégíti ki a legracionálisabban.

6.10.1. A szűrő fokszámának, és ω_3 körfrekvenciájának kiszámítása.

a, átszámítjuk a dB értékeket relatív értékekre, egyszersmind képezzük a reciprokok értékeit:

$$1/A(0 - 10kRad / s) = 10^{1/20} = 1,12 \quad (I)$$

$$1/A(50kRad / s) = 10^{40/20} = 100 \quad (II)$$

Képezzük (I) és (II) négyzetét:

$$(1,12)^2 = 1,26 \quad (III)$$

$$(100)^2 = 10000 \quad (IV)$$

Emeljük jelen fejezet (9) egyenletének (149. oldal) mindkét oldalát négyzetre, majd írjuk fel az így kapott egyenlet reciprokok értékét:

$$1/A^2(\omega) = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_3}\right)^{2n} \quad (V)$$

Végezzük el a behelyettesítéseket:

$$1,26 = 1 + \left(\frac{10k}{\omega_3}\right)^{2n}, \text{ azaz } 0,26 = \left(\frac{10k}{\omega_3}\right)^{2n} \quad (VI)$$

$$10000 = 1 + \left(\frac{50k}{\omega_3}\right)^{2n} \text{ (ebben az esetben az „1” elhanyagolható)} \quad (VII)$$

A (VI) és (VII) egyenletnek vegyük a 10-alapú logaritmusát (VIII) és (IX), majd írjuk fel (IX) és (VIII) különbségét:

$$4,59 = 2n \left(\lg \frac{10k}{\omega_3} - \lg \frac{50k}{\omega_3} \right) = 2n \lg \frac{50k}{10k} = 1,4n \quad (X)$$

$$n = 3,32 \quad (XI)$$

Természetesen „n” valójában 4, de a 3,32 érték alkalmas arra, hogy kiszámítsuk ω_3 értékét:

¹¹⁰ ld. 6-1. ábra

$4 = 6,64 \cdot \lg(50k/\omega_3)$, azaz

$$\omega_3 = 12,5 \text{ kRad/sec}$$

6.10.2. Az egyes tagok körjóságának számítása

Amennyiben a szűrő fokszáma „4”, úgy a szűrőnek 2 másodfokú tagból kell állnia. A 6-6a ábra szerint a pólusoknak a $-\sigma$ tengellyel bezárt ζ szöge $22,5^\circ$, illetve $67,5^\circ$, ennek alapján a körjóságok értékei:

$$Q = \frac{1}{2 \cos \xi}, \text{ azaz } Q_1 = \frac{1}{2 \cos(22,5)} = 0,54, Q_2 = \frac{1}{2 \cos(67,5)} = 1,3$$

Fenti értékek megtalálhatók természetesen a 6-3 Táblázatban is.

6.10.3. A szűrőkapcsolás megtervezése

A szűrőt aktív szűrő formájában tervezzük, az általunk ismert Sallen-Key kapcsolás szerint. A bemeneti tag a kisebb (0,54), a kimeneti a nagyobb (1,31) körjóságú., így még nagy jel esetén is elkerülhetőek a túlvezérlések.

Tekintettel a szükséges körjóságok alacsony értékeire, mindkét tag esetén

$D=1$ beállítás lehetséges. Hasonlóképpen, $\gamma=1$ [(22a) definíciók].

A „ τ ” értékek kiszámításához számítsuk ki a (24) alapján ω_0 és Q szorzatát: ($\gamma=1$)

$$\tau_2 = \frac{1}{2Q\omega_0} \quad (XII)$$

a (24) alapján könnyen számítható τ_1 értéke is: ($\gamma=1$)

$$\tau_1 = 4Q^2\tau_2 \quad (XIII)$$

ω_0 értéke mindkét fokozat esetében $12,5 \text{ kRad/s}$; A bemeneti fokozat esetében $Q=0,54$, a kimeneti fokozat Q értéke pedig $1,31$. (XII) és (XIII) alapján:

Bemeneti fokozatra $\tau_1 = 86 \text{ } \mu\text{sec}$, $\tau_2 = 74 \text{ } \mu\text{sec}$;

Kimeneti fokozatnál $\tau_1 = 208 \text{ } \mu\text{sec}$, $\tau_2 = 30 \text{ } \mu\text{sec}$

A pontos értékek kiszámításához $R_1=R_2$ értékeket kell meghatároznunk. Mindkét fokozatra vehetjük ugyanazt az értéket. Max. $100 \text{ } \Omega$ generátor-ellenállás esetén R értékét $2,4 \text{ k}\Omega$ -ban határozhatjuk meg, (ez 5% tűrésű, un. E24 sorban található). Ez megfelel a 6.10. pontban leírt követelményeknek.

A kiszámított RC értékek:

Bemeneti fokozat:

$$C_1 = 36 \text{ nF}; (5 \%, E24) \quad C_2 = 31 \text{ nF}; (\text{megfelel } 30 \text{ nF} - 5 \%, E24)$$

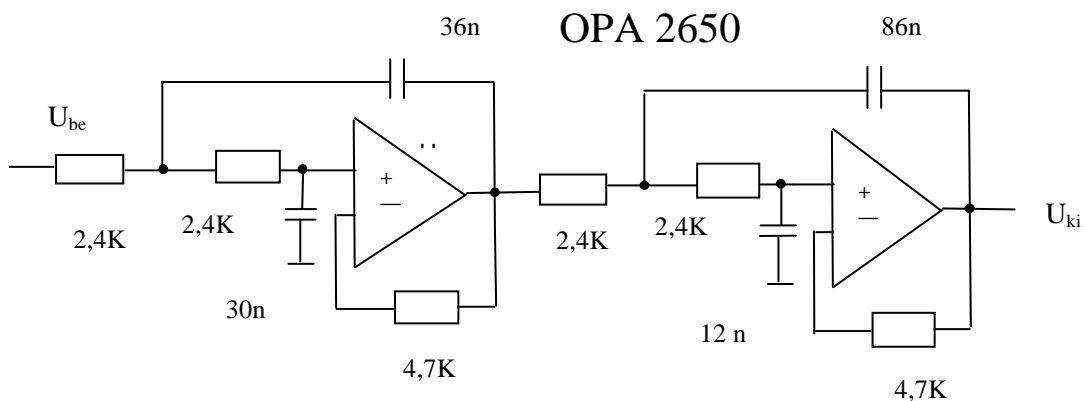
Kimeneti fokozat:

$$C_1 = 87 \text{ nF}, (\text{megfelel: } 86 \text{ nF}, 2,5 \%, E48), \quad C_2 = 12,5 \text{ nF}, (\text{megfelel } 12 \text{ nF}, \text{ de csak E48 sorból, max. } 2,5 \% \text{ t r ssel.})$$

A műveleti erősítő-elemek visszacsatoló ellenállásainak értéke a min. járulékos offset értékéből kiindulva 4,8 K, helyesebben: 4,7 K (ez nem túl kritikus, megfelel 10 % t r s  ellenállás, E12 sor)

Nem érdektelen a műveleti erősítő t pus nak megválasztása. Elsősorban a visszacsatolt erősítő fáziskarakterisztikája okozhat meglepetést, ebből a szempontból nem javasoljuk a divatos FET-bemenetű áramköröket. Megfelel pl. a dual tokozású OPA 2650. (BB).

A kapcsolás a 6.25.  br n látható,  rdeemes megépíteni, és bemérni. (Labormunka is lehet...)



6-25.  bra: 6-11 szerint tervezett aluláteresztő szűrő

Ellenőrző kérdések:

R

1. Mit nevezünk lineáris torzításoknak?
2. Milyen esetekben lényeges számunkra a hálózat fázistorzítása?
3. Az átviteli sáv elhelyezkedése szerint milyen szűrőtípusokat ismer?
4. Az azonos típusú szűrőkön belül miben különböznek egymástól a különböző szűrőcsaládok?
5. Melyik szűrőcsalád biztosítja a legjobb impulzusátvitelt?
6. Honnan ered a „kritikus csillapítású” szűrőcsalád elnevezése?
7. Melyik szűrőcsalád biztosítja az ideálshoz legközelebb eső amplitúdó-karakterisztikát az átviteli sávban?
8. Az egyenáramú csillapításhoz képest hány dB a csillapítása egy „n” fokszámú max. laposságú aluláteresztő szűrőnek a 3dB-es körfrekvencia 16-szoros értékénél ($=16\omega_3$)?
9. Mi a Csebysev-szűrő legfőbb alkalmazási területe?
10. Mit nevezünk kaszkád-kapcsolású szűrőnek? Mi az oka annak, hogy régebben nem tudtak elterjedni?
11. Mi az a Miller effektus? Hogyan használható fel az önindukciós tekercsek kiszorítására a szűrők nagy részéből?
12. A II. fejezetben (2.6.pont alatt) a hálózat érzékenységről beszéltünk. Ennek alapján mi lehetett kezdetben (a megfelelő olcsó erősítők elérhetőségén kívül) a Sallen-Key-féle szűrőkapcsolások elterjedésének akadálya?

VII. fejezet

Zajok

7.1. Alapfogalmak

Zajok alatt elvileg minden olyan „idegen”, nem az üzenetforrás által generált „üzenetet” értünk, mely csökkenti az általunk kiválasztott üzenet információtartalmát. Ezeket a „csökkentő tényezőket” az átviteli csatorna tökéletlensége okozza. A zajokat forrásuk szerint az alábbi csoportokra oszthatjuk (Természetesen elképzelhető egyéb felosztás is.)

- áthallás útján a csatornába kevert idegen információ (intermodulációs zaj)
- az átviteli közeg által létrehozott zavar (légköri zavar)
- a vevőberendezés által létrehozott, nem áthallás- (nem intermodulációs) zaj

Az első csoportba tartoznak a keresztmoduláció vagy véges szelektivitás, stb. útján az üzenetet zavaró idegen, de értelmes üzenet (idegen adó, intermodulációs bűgás, a TV képernyőjén látható, lassan átvonuló más program, hálózati szűretlenség, vagy az egyenirányító diódák által létrehozott parazita világosságjel, a hang ütemében megjelenő világosságjel-moduláció, stb.)

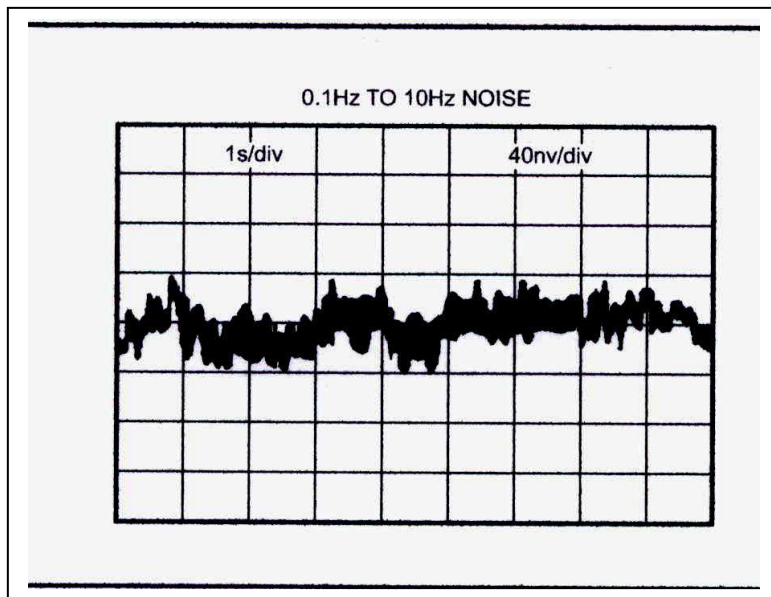
A második csoportba tartozik a rádióból idősebb emberek által jól ismert hálózati zavar (recsegés).

A harmadik csoportba tartozik minden zaj, melyet a vevő hoz létre, és nem sorolható az első csoportba. Ez a fejezet a „harmadik típusú” zajokkal foglalkozik. Újabbán szokás ide sorolni az intermodulációs zavarokat is, ezeket azonban nem fogjuk ebben a fejezetben tárgyalni.

Ezeknek a zajoknak a hatását három különböző érték is mérheti:

- jel-zaj viszony, a vevő különböző fokozatainak be-és kimenetén, pontosabban az érték változása (S/N, signal-noise ratio)
- zajszám, a berendezés egyes fokozatai által létrehozott „saját zaj” mérésére (un. KT_0 érték)
- zajtényező, az előbbi érték dB-ben kifejezett alakja.

Az ebben a fejezetben tárgyalt zajok valamennyien az 1. fejezetben már megismert „sztochasztikus” jelek alakjában jelentkeznek, ezért ismereteinket ki kell kissé tágítanunk.



7-1.ábra
Az OPA27 kiszajú műveleti erősítő kimeneti zaja, 0,1-10 Hz szűrővel mérve

7.2. Sztochasztikus jelek jellemzői

Mint az 1. fejezetben már említettük, a villamos jelek lehetnek *determinisztikusak* és *sztochasztikusak*.

Determinisztikusnak, azaz előre meghatározottnak nevezünk egy jelet abban az esetben, ha a jel pillanatnyi értékének leírására sikerül valamilyen meghatározott függvényleírást létrehozni, melynek független változója az idő. Az ilyen jelek mérési célokat szoktak szolgálni, segítségükkel jól megállapíthatók a hálózat átviteli tulajdonságai, de — mint ismeretes — az ilyen jelek információt nem hordoznak, hiszen a csatorna vevő oldalán történő létrehozásukhoz nincs is szükség semmilyen csatornára, elegendő a jel másodlagos generálása pl. függvénygenerátor segítségével.

A sztochasztikus jelek esetén a jel pillanatnyi értékének leírása lehetetlen. Jellemzésük részben statisztikai, ill. hosszú idejű középértékek alapján lehetséges.

A fejezet tárgyát képező zajok ebbe a csoportba tartoznak.

7.2.1. Sztochasztikus jelek statisztikai jellemzői (Ld. részletesebben: 1. fejezet, 21-23. oldal)

a, Eloszlás

Sztochasztikus jelek esetén a pillanatnyi értékek elegendően nagy mennyiségű mintáinak összevetése alapján képet kaphatunk arról, hogy mekkora a valószínűsége annak, hogy valamilyen $\xi(t)$ jel (pl. V-ban mért értéke) egy adott $U(x)$ értéket nem halad meg.

$$F(x) = P(\xi < x) \quad (\text{Villamos mennyiségeknél } \xi \text{ és } x \text{ lehet U, I, P, stb.}) \quad (1)$$

Ennek a függvénynek az alakja jellemző lehet az $\xi(t)$ jelre, ezért a jel lényeges paramétere. Ezt az $F(U)$ [vagy $F(I)$] függvényt a $\xi(t)$ jel **eloszlásfüggvényének** nevezzük, $F(U)$, vagy $F(I)$ mértékegység nélküli, 0 és 1 között változó értékű, monoton növekvő függvény, a legtöbb esetben matematikailag meghatározható. Mivel a sztochasztikus jelek folytonos jelek, az eloszlásfüggvények is folytonosak. Legismertebb eloszlásfüggvények a „normál” és a Poisson-eloszlásoké.

b, Eloszlássűrűség

Matematikailag az $F(x)$ függvény (x) szerinti deriváltja. $\xi(t)$ jel x és $(x+\Delta x)$ közötti értékek közötti előfordulási valószínűségének a határértéke, ha Δx értéke a 0-hoz tart.

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x < \xi < x + \Delta x) \quad (2)$$

c, Várható érték

A várható érték a sztochasztikus $\xi(t)$ jel $f(x)$ értékeinek x értékekkel súlyozott integrálja valamennyi x értékre:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (3)$$

Diszkrét jelek esetén ez a súlyozott átlag, ezt terjesztjük ki folyamatos jelekre. *A várható érték nem feltétlenül esik egybe $f(x)$ maximumának megfelelő x értékkel.* Ez az érték $F(x)$ és $f(x)$ értéktől eltérően nem tartalmaz lényeges információt a sztochasztikus jelre vonatkozóan, a zajok nagy részében értéke 0. Igen fontos jellemző viszont a

d, Szórás

A szórás a jel pillanatnyi értékeinek a várható értéktől való *súlyozott átlagos eltérést* méri. Az eltérések előjele érdektelen, ezért az átlagolás előtt az eltéréseket négyzetre emeljük. A kapott érték a szórásnégyzet. Gyökvonás után megkaphatjuk magát a szórás értékét is, de általában a szórásnégyzettel számolunk:

$$D^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(\xi)]^2 f(x) dx \quad (4)$$

Kifejtve $M(\xi)$ értékét, az alábbi igen ravasz összefüggéshez jutunk:

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 \quad (5)$$

Azaz a szórásnégyzetet megkaphatjuk, ha kiszámítjuk a $\xi(t)$ jel négyzetének várható értékét (ez természetesen pozitív), majd ebből kivonjuk magának a $\xi(t)$ jel várható értékének a négyzetét. (Ez is pozitív).

¹¹¹ A normál eloszlás sűrűségfüggvényét az 1. fejezet 14. oldalán illusztráltuk.

A legtöbb esetben, (mint említettük,) a zajok várható értéke 0, így a szórásnégyzet értéke egyenlő a sztochasztikus jel négyzetének várható értékével, azaz a jel effektív értékével.
(NB)

$$D^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \quad (6)$$

e, Korreláció, autokorreláció

A „korreláció” szó két folyamat közötti kapcsolatra, esetleg függőségre utal. (A munkanélküliség nagysága jól korrelál a koldusok számával, stb.). A mi esetünkben arra utal, hogy két sztochasztikus jel pillanatnyi értéke (azaz maga a jel) milyen mértékben adható össze, illetve vonható ki.

A korrelációs tényezőt C-vel jelöljük, értéke -1 és +1 között változhat, mértékegysége nincs.

C=1 esetben a két jel forrása ugyanaz, illetve csoda történt, és a pillanatértékek összeadhatók.

C=-1 esetben a két jel pillanatértékeit ki kell vonni egymásból.

Természetesen ez így még értelmetlen, a sztochasztikus jelet nem lehet leírni pillanatértékekkel, csak „a-d” pontokban definiált jellemzőkkel, főleg a szórással, mely a jel effektív értéke.

A korrelációs koefficiensre tehát valójában akkor van szükségünk, mikor két zajforrás együttes effektív értékét szeretnénk kiszámítani.

Az eredő effektív érték két független jel (pl. különböző frekvenciájú determinisztikus jelek) esetén az alapjelek effektív értékének négyzetösszegéből vont négyzetgyök.

$$\xi_{\text{efferedő}}^2 = \xi_{1\text{eff}}^2 + \xi_{2\text{eff}}^2 \quad (7) \text{ NB}$$

C=-1 esetben az eredő számítása hasonló módon történik:

$$\xi_{\text{efferedő}}^2 = (\xi_1 - \xi_2)_{\text{eff}}^2 = \xi_{1\text{eff}}^2 + \xi_{2\text{eff}}^2 - 2\xi_{1\text{eff}}\xi_{2\text{eff}} \quad (7a)$$

Általános esetben a kapcsolatot C értéke határozza meg:

$$\xi_{\text{efferedő}}^2 = \xi_{1\text{eff}}^2 + \xi_{2\text{eff}}^2 + 2C\xi_{1\text{eff}}\xi_{2\text{eff}} \quad (7b)$$

Nagy figyelmet érdemel az autokorreláció fogalma. Ebben az esetben azt vizsgáljuk, hogy a jel mennyire vethető össze önmaga valamilyen τ idővel eltolt értékével. Az autokorrelációs függvény változója tehát valamilyen adott időeltolás, jele τ . Értékét olyan módon kaphatjuk meg, hogy a $\xi(t)$ jel értékét megszorozzuk saját maga τ idővel eltolt értékével, s ennek a szorzatnak a középértékét számítjuk ki „valamennyi” t időpontra:

$$\Gamma(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t)\xi(t+\tau) dt \quad (8)$$

Klasszikus sztochasztikus jel esetén $\Gamma(\tau)$.értéke $\tau=0$ esetben megegyezik a szórásnégyzet értékével, egyéb τ mellett viszont 0. (emlékeztet a $\delta(t)$ függvényre...). Ez abban az esetben igaz, ha a sztochasztikus függvény képzeletbeli Fourier-spektruma (hogy ez létezik-e, arról a 6.2. pontban beszélünk) elméletileg nem sávhatárolt.

A gyakorlatban a sztochasztikus jelek spektruma korlátos, létezik valamilyen határfrekvencia, annál is inkább, mert ezeket a jeleket valamilyen véges sáv szélességű hálózat kimenetén mérjük. Ebben az esetben viszont igen kis τ esetén $\Gamma(\tau)$.értéke nem 0, és a sáv szélesség csökkenésével egyre lassabban esik 0 felé. A $\Gamma(\tau)$.függvény kezdeti értéke a zaj effektív értékére, alakja pedig a zaj „sáv szélességére” utal.

7.2.2.. Sztochasztikus jelek spektrális jellemzői

A Fourier-transzformáció sztochasztikus jelekre csak kellő óvatossággal alkalmazható.

A sztochasztikus jelek természetesen aperiódikus jelek, elvileg tehát a spektrumsűrűsége a Fourier-transzformáció lehetne alkalmazható, ha az impromprius-integrál (azaz a $-\infty$ és a $+\infty$ időhatárok között számított határozott integrál) véges értékű lenne:

$$s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) e^{-j\omega t} dt$$

[$\xi(t)$ jel Fourier-transzformáltja, az eredmény elvileg valamilyen komplex spektrumsűrűsége utalna, abszolút értékkel és fázissal]

Ez az egyenlet azonban több sebből is vérzik. A sztochasztikus jel impromprius integrálja önmagában is végtelen, így eleve megsértjük a Fourier-transzformáció 1. feltételét. Ezt még megoldhatjuk oly módon, hogy a sztochasztikus jelet valamilyen (véges értékű) $-T$ és $+T$ idő között értelmezzük.

Nagyobb problémát azonban a megoldandó feladat okoz. A jelet természetesen nem tudjuk valamilyen $\xi(t)$ függvényként algebrai formába önteni, hiszen sztochasztikus. Ezért valamilyen képzeletbeli $f(j\omega)$ [fázisa is van!] számítása eleve illuzórikus, szerencsére nincs is rá szükségünk.

Nem ezt a függvényt keressük. A zaj szempontjából annak hatása elsődleges, az pedig a zaj effektív értékével, pontosabban annak négyzetével arányos. Számunkra tehát lényeges a zaj

„effektív érték-négyzetének” (ami ohmikus terhelés mellett a zajteljesítménnyel arányos) a spektrális eloszlása, $s(\omega)$.¹¹³ Ezt az ún. Parseval-tétel¹¹⁴ segítségével könnyen kifejezhetjük:

$$\int_{-T}^T [\xi(t)]^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |s(\omega)|^2 d\omega \quad (9)$$

A zaj „effektív érték négyzetnek” (ξ_{eff}^2) értékét, a (9) egyenlet mindkét oldalának $2T$ -vel való osztásával nyerhetjük. T értékének ∞ -hez történő közelítésével:

$$\xi_{\text{eff}}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} \int_{-\omega}^{\omega} |s(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\omega}^{\omega} p(\omega) d\omega \quad (10)$$

A (10) egyenletben szereplő $p(\omega)$ elnevezése „teljesítménysűrűség”¹¹⁵ pontosabban: **az effektív érték négyzete, ami természetesen nem teljesítmény, csak arányos vele.**

$$p(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} |s(\omega)|^2 \quad (11)$$

A (11) egyenletben csak az a gond, hogy $s(\omega)$ kiszámíthatatlan, viszont a (10) egyenlet ezek után lényeges, új alakot ölthet:

$$\xi_{\text{eff}}^2 = \int_{-\omega}^{\omega} p(\omega) d\omega, \text{ vagy } \xi_{\text{eff}}^2 = \int_0^{\omega} P(\omega) d\omega \quad (12) \text{ NB}$$

$S(\omega)$ kétszerese $s(\omega)$ értéknek, mivel az integrálás csak pozitív ω értékekre történik:

$$P(\omega) = 2p(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} |s(\omega)|^2 \quad (13)$$

Sztochasztikus jelek, azaz zajok esetén tehát az effektív érték négyzete a teljesítménysűrűség” ω szerint történő integrálása útján számítható. A „teljesítménysűrűség” egysége W/rad , illetve V^2/rad , A^2/rad .

$P(\omega)$ helyett általában a $P(f)$ sűrűség érték terjedt el, amely $S(\omega)$ értékének 2π -vel történő leosztásával származtatható.

A tényleges effektív sűrűséget — $\sqrt{S(f)}$ — V/\sqrt{Hz} stb. értékben szokás megadni, (ilyenkor természetesen nem ω , hanem f szerint kell integrálni). Mint látni fogjuk, a zajok jelentős része ún. „fehér” zaj, ami csak annyit jelent, hogy $S(\omega)$, vagy $S(f)$ értéke állandó az átviteli sávon belül. Ilyenkor az integrálás szorzássá degradálódik.

¹¹³ a „j” immár hiányzik. Az „effektív érték négyzete” az effektív érték abszolút értékének a négyzete, már nem utal a fázisra, hanem a teljesítménnyel arányos érték.

¹¹⁴ Antoine Parseval, (1755, Rosières-aux-Salines—1836, Párizs) matematikus, fizikus, royalista, több évet a francia forradalom és Napoleon császársága idején börtönben kellett töltenie. A „Parseval-formula” eredetileg némileg más formában volt ismert.

¹¹⁵ Igen lényeges terminológia – NB.

7.3.Zajforrások

a, Passzív hálózat zajforrásai.

Termikus zaj

Passzív hálózatok leggyakoribb zajforrása az ellenállások által keltett *termikus zaj*. A termikus zaj igen egyszerű oka a vezetőréteget alkotó atomok rezgőmozgása, melynek sebessége a hőmérséklettel egyenesen arányos. Az elektronok rendszertelenül ütköznek a rezgőmozgást végző atomokkal, ily módon az ellenálláson átfolyó áram értéke az ohm törvény szerinti érték körül ingadozik. Az ellenállás-zaj (termikus zaj) „fehér zaj”, azaz az ellenállás által létrehozott „zaj-generátorteljesítmény”¹¹⁶ sűrűsége $[S_P(f)]$ a frekvencia függvényében konstans, és $4KT_0$ ¹¹⁷ értékével egyenlő. (k = Boltzmann-féle konstans $1,38 \cdot 10^{-23}$ erg), T_0 pedig az ellenállás vezetőrétegének hőmérséklete K-ben mérve)¹¹⁸

Ha az ellenállás kapcsain mérhető zajfeszültség effektív értéke lényeges, akkor a $P = S_P(f)B$, valamint az $U = \sqrt{PR}$ képlet alapján

$$U_{eff} = \sqrt{4KTRB} \quad (B[\text{bandwidth}] \text{ — a rendszer un. zaj-sáv szélessége, ld. 6.4}) \quad (14)$$

„Diódazaj”,

A félvezető diódán átfolyó áram értéke ismert módon valójában két áram értékének a különbsége

$$I = I_{drift} + I_{diff}$$

A driftáramot a kisebbségi töltéshordozók, a diffúziós áramot a többségi töltéshordozók hozzák létre. mindkét áramot a p-n átmeneten véletlenszerűen áthaladó elektronok/„lyukak” hozzák létre, s az áramzaj létrehozásában mindkét folyamat részt vesz. Az egyes áramösszetevők által létrehozott zajáram effektív értéke négyzetének a sűrűsége arányos az adott áramkomponens értékével. Ez a zaj füllel észlelve apró lövésekre emlékeztet, a magyar terminológiában a „sörétzaj” elnevezést viseli (shot noise) Ez is fehér zaj, azaz $S_I(f)$ értéke állandó:

¹¹⁶ A Thevenin-modell szerint az adott feszültségforrásnak+belső ellenállásnak megfelelő teljesítmény, amit az üresjárási feszültség effektív értékének a rövidzárási áram effektív értékével történő szorzatának felel meg. Jelen esetben az üresjárási feszültség az ellenállás két kapcsán az áramkör bontása után mérhető, az áram pedig fenti értéknek magának az ellenállással történő osztásával nyerhető. (ld. 6.4.1.)

¹¹⁷ $4KT_0$ értéke 27°C hőmérséklet mellett $1,66 \cdot 10^{-8}$ pW/Hz

¹¹⁸ Valamely tisztán valós R_g belső ellenállású generátor (nem tárgyaltuk) által létrehozott „generátorteljesítmény” alatt a generátor Thevenin-helyettesítőképe szerint a kimeneten mérhető üresjárási feszültség effektív értékének ($U_{i,eff}$) a generátor kimenetének rövidrezárása során mérhető rövidzár-áram effektív értékével ($I_{r,eff}$) történő szorzatát értjük. A generátornak a külső hálózathoz történő (ebből a szempontból) optimális illesztésével ($R_g = R_{be}$) ennek a teljesítménynek maximum a negyedét tudjuk a külső hálózatba átvinni. (2. ábra)

$$S_I(f) = 2I_q (q \text{ — az elektron töltése — } 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Cb}) \quad (15)$$

Nyitóirányú előfeszítés esetén csak I_{diff} áram zajkomponensét kell figyelembe vennünk. 1,6mA áramérték mellett a zaj effektív értéke $23 \text{ pA} / \sqrt{\text{Hz}}$, nem is kevés.

Záróirányú előfeszítés esetén 1-2V-nál magasabb zárófeszültség esetén csak driftárammal kell számolnunk.

Legrosszabb a jel-zaj viszony 0 mA összáram (azaz OV előfeszítés) esetén. Ilyenkor mindkét komponens jelen van, s mivel a korrelációs koefficiens ρ értéke 0, a két S_{8f} értéke összeadódik.

$$S_I(f) \Big|_{\Sigma I=0} = 4I_o q$$

I_o — a driftáram értéke. Jelen esetben az a helyzet érdekessége, (kár, hogy komoly gondot is jelent) hogy „jeláram” nem folyik, zaj viszont igen.

b, Aktív hálózat zajforrásai.

Jelen körülmények között az aktív félvezető-elemek (bipoláris és FET tranzisztorok) zaja tartozik ide.

A bipoláris tranzisztoroknál a diódáknál megismert módon az emitteráram értékével arányos fehérzaj, és az un. árameloszlási zaj figyelhető meg, utóbbi a bázisrétegben történő rekombinációs jelenségekkel függ össze, s a bázisáram (pontosabban a bázis- és kollektor-áram replusz eredőjének — $I_b I_c / I_e$) értékével arányos.

FET tranzisztoroknál a draináramban mérhető csatornazaj dominál. Ennek a fehérzajnak a spektrumsűrűsége arányos a tranzisztor transzkonduktanciájával (g_m), de függ a tranzisztor drain-source feszültségének és un. hatásos gate-source feszültségének ($U_{GS}' = U_{GS} - U_{th}$) arányától is. Nagyobb U_{DS} érték mellett nő a zajsűrűség)

c, a flickerzaj (villódzási zaj)

Ez a zaj mind passzív, mind aktív hálózatoknál megfigyelhető. Fizikai eredete magyarázható az ellenállások, félvezető eszközök felületi hibáival, a szennyezettség inhomogenitásával, a kristályszerkezettel, és sok minden mással, de pontos magyarázata a mai napig szerintünk nincs.

A mérnök számára marad tehát a jelenség leírása, ami — ha nem lenne ennyire zavaró — igen érdekes is lehetne. A zaj (pl. áramzaj) effektív értéke négyzetének a spektrumsűrűsége ugyanis nem tekinthető konstansnak, mint a többi zaj esetén, hanem a *frekvenciával fordítottan arányos*.

Ez durván azt jelenti, hogy DC erősítők esetén ez a sűrűség 10 Hz és 1 Hz között megtízszereződik, 1 Hz és 0,001 Hz között megszázsorozódik, stb. Ha egy berendezés 1

napig be van kapcsolva, ez 24.3600 mp-nek, azaz $8,7 \cdot 10^4$ mp-nek felel meg, durván 10^{-5} Hz értéknek. A kimeneti jel lassú úszása tehát igen nagy mértéket ölthet, a méréseket rendszerint a kimeneti érték 1 óránként történő mérésével végzik. Az utóbbi időben az Egyesült Államokban rengeteg szabadalmat adtak be ebben a tárgyban, óriási védettséggel.

7.4. A zajsávszélesség fogalma

Bocsássunk át elvileg végtelen teljesítményű, de véges $s(\omega)$ teljesítménysűrűségű termikus zajt valamilyen $|A|(\omega)$ karakterisztikával rendelkező szűrőn. A szűrő kimenetén a zajfeszültség effektív értékének a négyzetét az alábbi egyszerű egyenlet szerint számíthatjuk ki:

$$E_{ki}^2 = \int_{-\omega}^{\omega} p(\omega) |A|^2 d\omega \quad (16)$$

Tekintsük úgy, hogy a szűrő $|A|(\omega)$ karakterisztikája konstans, és egyenlő a karakterisztika max. értékével (ez lehet sávszűrő esetén sávközépen, aluláteresztő esetén DC „frekvencián”, de pl. Csebysev szűrő esetén máshol is), és ezt az értéket helyettesítsük be a (14) egyenletbe oly módon, hogy E_{ki}^2 értéke változatlan maradjon. E célból egy olyan $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ értéket kell találnunk, amire fenti követelmény teljesül:

$$E_{ki}^2 = p(\omega) A_{\max}^2 \Delta\omega_z = p(f) A_{\max}^2 B \quad (14b)$$

Fenti egyenletben szereplő B (bandwith), ill $\Delta\omega_z$ értékeket zajsávszélességnek, illetve az ennek megfelelő körfrekvencia-értéknek nevezzük

A. zaj-sávszélesség a szűrő átviteli karakterisztikájától függ. Egyszerű elsőfokú RC szűrő esetén értéke a 3 dB-es sávszélesség $\pi/2$ -szerese. Másodfokú Butterworth szűrő esetében a szorzószám 1,22, negyedfokú esetben 1,09, így közeledve a szűrő 3 dB-es sávszélességéhez.

7.5. Erősítők zaja

7.5.1. Az erősítő saját zajának modellezése

Az erősítők által termelt zaj az erősítő négy pólus kimenetén jelentkezik oly módon, hogy a bemeneten mérhető zajhoz „hozzáadódik az erősítő „saját zaja”. (ez lehet zajteljesítmény, lehet a kimeneti zaj effektív értéke, vagy az utóbbi négyzete: W, V, V^2) A „hozzáadódást”, mivel a korreláció értéke 0-nak tekinthető, a zajteljesítmény ill. az effektív érték négyzetének vonatkozásában kell érteni:

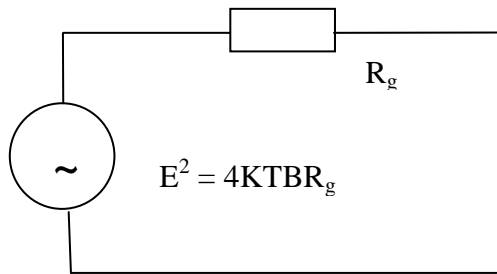
$$P_{zki} = A_p P_{zbe} + P_{zsját}$$

Régi tartozásunkat lerovandó, A_p értékét definiálnunk kell:

A teljesítményerősítés a bemenő és a kimenő teljesítmény hányadosa, azaz

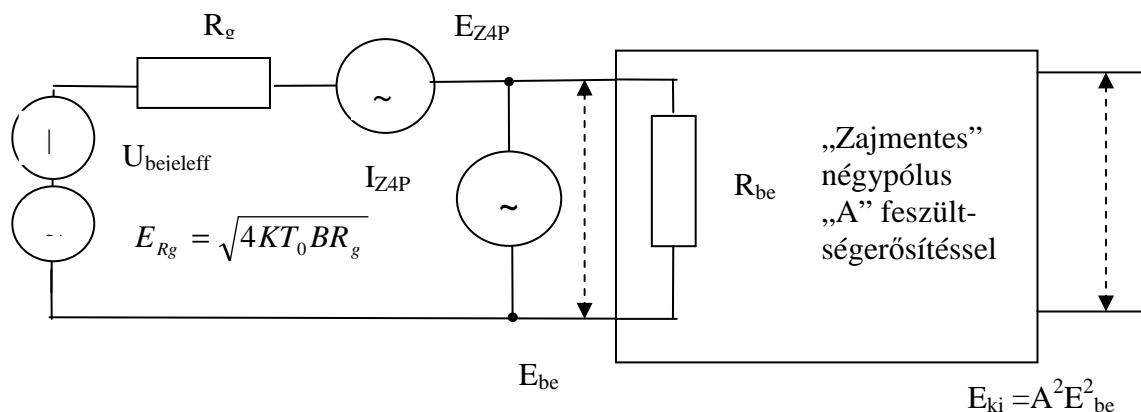
$$A_p = |A|^2 \frac{R_{be}}{R_i} = (\bar{A} \bar{A}^*) \frac{R_{be}}{R_i} \quad (A^* \text{ -gal } A(j\omega) \text{ konjugáltját jelöljük}) \quad (17)$$

Ha egy hálózat kimenetén E effektív értékű zajfeszültség lép fel, azt egy zajgenerátorból és egy „zajmentes” ellenállásból álló egyszerű helyettesítőképpel is definiálni lehet. Az ellenállás a Thevenin helyettesítőkép kimenő impedanciája, míg az E zajgenerátor reprezentálja az adott ponton mérhető zaj effektív üresjárási értékét. Ha ez a pont a hálózat bemenete, úgy az E érték a meghajtó generátor belsőellenállásának megfelelő termikus zaj.



7-2. ábra
Zaj értéke a hálózat bemenetén

Az erősítő kimenetén mérhető zaj nagyságát az erősítő bemenetére számítjuk át oly módon, hogy az erősítőt a továbbiakban zajmentesnek tételezzük fel, viszont az erősítő bemeneti áramkörét E zajfeszültség- és I zaj-áramgenerátorral együtt ábrázoljuk:



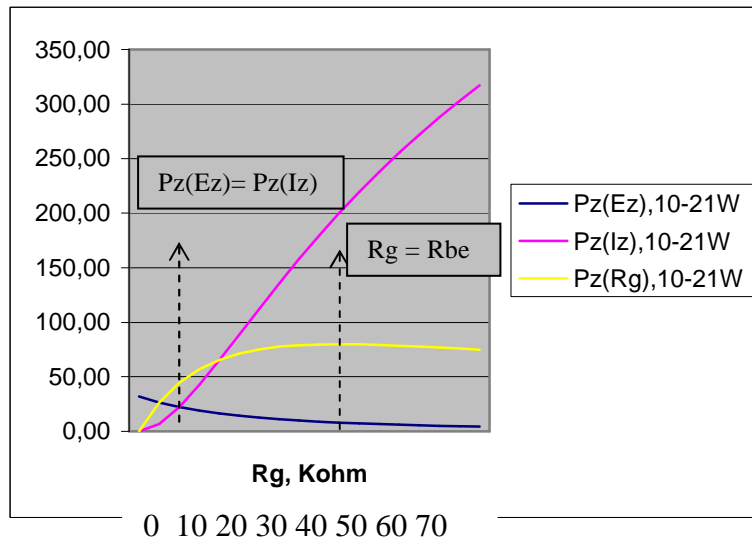
7-3. ábra.

Erősítő négypólus saját zajának helyettesítő képe zajmentes négypólussal, és bemeneti feszültség- ill.áram-zajgenerátorral. E_g a rendszer bemeneti zajforrása, ill. a meghajtó generátor belső ellenállása termikus zajának effektív értéke

Felvetődhet a kérdés, hogy miért van szükség a négypólus által keltett zaj modellezésénél két zajgenerátorra. A választ akkor kaphatjuk meg, ha megvizsgáljuk, hogyan változik a

négypólus kimeneti *saját zajának* az értéke (célszerű teljesítményben kifejezni) a bemenet belső ellenállásának (R_g) függvényében.

$$P_{kisaját} = \left[\frac{R_{be}}{(R_g + R_{be})^2} E_{NP}^2 + \frac{R_{be} R_g^2}{(R_g + R_{be})^2} I_{NP}^2 \right] A_p \quad (19)$$



7-4. ábra.
Négypólusnak a bemenetre átszámított saját zaja, és a termikus zaj
 $E_z = 40 \text{ nV}$,
 $I_z = 4 \text{ pA}$,
 $R_{be} = 50 \text{ K}\Omega$
 $B = 80 \text{ Hz}$

7.5.2. Zajszám, zajtényező (Noise figure, noise factor)

Az erősítő által létrehozott un. „saját zaj” *relatív* értékének nagyságát először a TV vételtechnikában, de ma már széleskörűen kiterjesztett értelmezésben is használt „zajszám”-mal jellemezhetjük. A „zajszám” (F) definíciója igen egyszerű

$$F = \frac{\text{Teljes kimeneti zajteljesítmény}}{\text{A kimeneti zajteljesítménynek } E_g \text{ által létrehozott része}} \quad (22) \text{ NB}$$

Mivel a bemeneti zajteljesítmény tisztán a meghajtó generátor belső ellenállásából eredő zaj, a számlálónak, s a nevezőnek a reciprok értékét a „hasznos” jel teljesítményével megszorozva kapjuk az „F” érték közismert értelmezését:

$$F = \frac{\text{Bemeneti jel - zaj viszony}}{\text{Kimeneti jel - zaj viszony}} \quad (23) \text{ NB}$$

Utóbbi értelmezéshez két fontos kikötéssel tartozunk:

1, Mindkét érték vagy teljesítményben, vagy az effektív értékek négyzetében értendő, ha az adott szakterület mást nem ír elő;¹¹⁹

¹¹⁹ Pl. TV technikában a tényleges hatásból kiindulva jel-zaj viszony alatt a jel fekete-fehér távolságának a zaj effektív értékéhez mért aránya értendő, mivel azonban az arány dB-ben értendő, a teljesítmény az adott esetben helyettesíthető az effektív értékkel.

2. A bemeneti zajteljesítmény alatt kizárólag a "zajmentes" jelgenerátor R_g belső ellenállása által létrehozott P_g termikus zajteljesítményt értjük.

Igen elterjedt a zajszám mellett a zajtényező (noise factor) értelmezése, amely a zajszám érték dB-ben kifejezett változata.

A zajtényező esetében a zajteljesítmények az effektív értékekkel is felcserélhetők. (Teljesítmény esetében a zajtényező a zajszám logaritmusának tízszerese, effektív értékek esetében pedig húszszorososa).

Az adott négypólus zajszáma az E_z , I_z értékek, a T_0 hőmérséklet és az erősítő B zajsáv szélessége ismeretében az alábbi egyenlet szerint számítható ki:

$$F = \frac{P_{Ez} + P_{Iz} + P_g}{P_g} = 1 + F_{Ez} + F_{Iz},$$

ahol P_{Ez} , P_{Iz} , P_g az E_z , I_z ekvivalens bemeneti zajgenerátorok, valamint az R_g generátor-ellenállás által létrehozott, a *négypólus bemenetén* mérhető zajteljesítmények.

A zajszám mértékének, és általában az erősítők zajának kiszámítását jelentős mértékben megkönnyíti, ha a generátor belső Z_g impedanciáját, valamint a négypólus Z_{be} bemenő impedanciáját az átviteli sávban valósnak tekintjük. (R_g és R_{be}).

Vezessük be a négypólus bemeneti feszültségátviteléhez a $q = \frac{R_{be}}{R_{be} + R_g}$ jelölést.

$$\frac{R_g}{R_{be} + R_g} = 1 - q; \quad \frac{R_{be} R_g}{(R_{be} + R_g)^2} = q(1 - q);$$

$$F_{Ez} = \frac{P_{Ez}}{P_g} = \frac{q(1 - q)(E_z^2 / R_g)}{q(1 - q)4kT_0 B} = \frac{E_z^2 / R_g}{4kT_0 B},$$

$$F_{Iz} = \frac{P_{Iz}}{P_g} = \frac{I_z^2 R_g}{4kT_0 B}$$

$$F = 1 + \frac{(E_z^2 / R_g) + (I_z^2 R_g)}{4kT_0 B} \quad (25) \mathcal{NB}$$

$F(R_g)$ min. értékét $R_g = E_z / I_z$ behelyettesítéssel kaphatjuk:

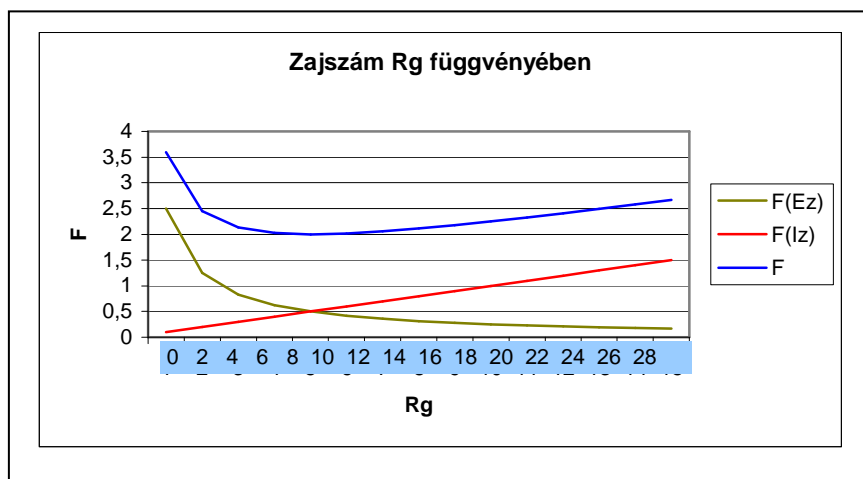
$$F_{\min} = 1 + \frac{E_z I_z}{2kT_0 B} \quad (25a) \mathcal{NB}$$

A zajszám értéke tehát a meghajtó generátor belső ellenállásának a függvénye. $F(R_g)$ alakja jellemző a bemeneti E_z / I_z hányadosra: *A görbe min. értéke $R_g = E_z / I_z$ értéknek felel meg.*

Ezt az R_g értéket R_{gopt} -nak szokás nevezni,

A gyakorlatban a helyzet fordított. A meghajtó generátor belső ellenállása adott, s a feladat olyan bemeneti erősítő alkalmazása, melyre nézve az E_z/I_z hányados ezt közelíti.

Műveleti erősítő alkalmazásánál bipoláris tranzistoros bemenetű erősítő esetén a hányados többszáz ohm körüli érték (Azt SGS –Thompson extra kis zajú erősítőre $R_{gopt} = 260 \Omega$). Nagy bemenő impedanciájú meghajtás esetén célszerűbb FET-bemenetű erősítőt használni, bár



7-5. ábra. Erősítő zajszáma a meghajtó generátor belső ellenállásának a függvényében. ($E_z=40 \text{ nV}$, $I_z=4 \text{ pA}$, $B=80 \text{ Hz}$)

ebben az esetben E_z értéke jóval nagyobb. A Burr-Brown cég OPA111 erősítője esetén $R_{gopt}=40 \text{ M}\Omega$).

Az alábbi táblázatban felsoroljuk néhány műveleti erősítő bemenetre visszavonatosított és valóságos bemeneti zajának effektív értékeit két különböző belső-ellenállás érték mellett. A táblázat értékei magukért beszélnek, s igen tanulságosak.

7-1. táblázat. Bemeneti átszámított zajértékek különböző műveleti erősítők esetén

Erősítő típusa	$E_z \Delta f = 10 \text{ kHz}$	$I_z \Delta f = 10 \text{ kHz}$	$R_g = 60 \Omega$, $E_g = 100 \text{ nV}$		$R_g = R_{opt}$		
			$E_{be}, \text{ nV}$	F^{120}	$E_{be}, \text{ nV}$	F	R_{gopt}
TSH 300 ST	77 nV	300 pA	126	1,6	230	1,2	260
OPA 27	500 nV	170 pA	510	26	1000	2	3 K Ω
OPA 110	5000 nV	110 fA	5000	2500	100000	1,01	45 M Ω

¹²⁰ F értéke: $(E_{be}^2 + 4KTR_g) / 4KTR_g$

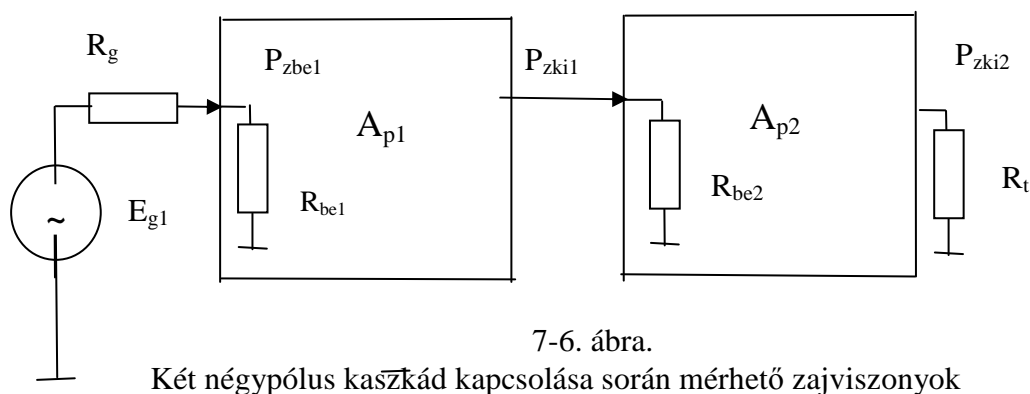
(Láthatjuk, hogy az F nem minden. R_g növelése R_{be} érték alatt valójában monoton növeli a kimeneti zajteljesítmény értékét.)

Fenti táblázatban az erősítő saját zajának a bemenetre történő visszaszámolásából indultunk ki. (ld. 9. lábjegyzet). Nagy bemenő impedancia, nagy terhelő ellenállás esetén célszerűbb „zajteljesítmény” helyett a zajfeszültség effektív értékének a négyzetével dolgozni.

7.5.3. Kaszkád kapcsolású négyfázisok (erősítők, vagy passzív hálózatok) eredő zajszáma

Igen életszerű annak a problémának a felvetése (elsősorban erősítőknél), hogy több fokozat kaszkádba kapcsolása esetén hogyan alakul az egész rendszer kimeneti teljes zajának a rendszert meghajtó generátor belső ellenállása által létrehozott termikus zaj által felerősített zajértékhez viszonyított aránya, más szóval az eredő zajszám, ismét más szavakkal: hogyan változik a jel-zaj viszony a rendszer bemenetétől a kimenetéig, (pontosabban: mennyire romlik). Azt józan paraszti, azaz műszaki ésszel is átlátható, hogy a zajtulajdonságok romlásáért nyilván az a fokozat a „felelős”, ahol a jel nagysága még kicsi. A pontos számítás nem túl bonyolult, és alátámasztja ezt az elgondolást.

Első lépésként tekintsük a 7-6. ábra szerinti kapcsolást.



Az erősítő bemenetére jutó termikus zaj teljesítménye:

$$P_{zbe1} = 4KT_0BR_g \frac{R_{be}^2}{(R_g + R_{be})R_{be}} = 4KT_0B \frac{R_{be}}{R_g + R_{be}} \frac{R_g}{R_g + R_{be}} = 4KT_0Bq(1-q) \quad (I)$$

Vezessük be a $P_g = 4KT_0B$; jelölést, és a $g^2 = q(1-q)$ helyettesítést. „g” a bemenet „illesztettségére” utal. g max. értékét $q=0,5$ értéknél, azaz az optimális illesztésnél kapjuk.¹²¹ ($g_{\max}=0,5$).

Az 1. erősítő kimeneti zaja a bemeneti zajteljesítmény F_1 -gyel és A_{p1} -gyel felszorozott értéke:

$$P_{zki1} = P_g g_1^2 F_1 A_{p1} \quad (\text{II})^{122}$$

A 2. erősítő kimenetén mérhető zaj:

$$P_{zki2} = P_g g_1^2 F_1 A_{p1} A_{p2} + P_{zki2saját} \quad (\text{III})$$

Valamely erősítő kimeneti saját zaja a bemeneti P_g termikus alapzaj g^2 -tel,

A_p -vel és (F-1) koefficienssel felszorozott értéke:

$$P_{zki2saját} = (F_2 - 1) A_{p2} P_g (g_2^2) \quad (\text{IV})$$

Behelyettesítve (IV)-et (III)-ba,

$$P_{zki2} = F_1 A_{p1} A_{p2} P_g (g_1^2) + (F_2 - 1) A_{p2} P_g (g_2^2) \quad (\text{V})$$

Tekintsük a két négyfólyust egy F_{eq} zajszámú rendszernek:

$$P_{zki2} = F_{eq} A_{p1} A_{p2} P_g (g_1^2) \quad (\text{VI})$$

Fejezzük ki F_{eq} értékét (V) és (VI) alapján:

$$F_{eq} = F_1 + \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^2 \left(\frac{F_2 - 1}{A_{p1}}\right) \quad (25)$$

N kaszkádba kapcsolt négyfólyus eredő zajszáma pedig:

$$F_{eq} = F_1 + \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^2 \left(\frac{F_2 - 1}{A_{p1}}\right) + \left(\frac{g_3}{g_1}\right)^2 \left(\frac{F_3 - 1}{A_{p1} A_{p2}}\right) + \dots + \left(\frac{g_N}{g_1}\right)^2 \left(\frac{F_N - 1}{A_{p1} A_{p2} \dots A_{pN-1}}\right) \quad (26) \mathcal{NB}$$

Fenti egyenletből rendszerint elhagyják a „ g_N/g_1 ” szorzókat, [mert a „q” értékek egyenlők, ezen belül $q=0,5$, (opt. teljesítményillesztés), vagy $q \approx 1$, (nagy bemeneti ellenállású erősítő fokozatok)]. Lényeges azonban, hogy — mint láthattuk — *valamennyi F érték a fokozatot konkrétan meghajtó előző fokozat belső ellenállásának a függvénye. [F = f(R_g)]*

A 26. egyenlet világosan mutatja, hogy egy többfokozatú erősítő zajszámát lényegében az első fokozat zajszáma határozza meg.

¹²¹ q, g valós számok, mivel feltételeztük, hogy mind a generátor belső impedanciája, mind a négyfólyus bemenő impedanciája valós értékek. Ebben az esetben $0 \leq q \leq 1$, $0 \leq g \leq 0,5$. (Komplex értékek esetén az optimális teljesítményillesztés feltétele tanult ismereteink szerint $Z_{gopt} = Z_{be}^*$)

¹²² Római számmal csak a jelen levezetéshez szükséges egyenletek számát jelöljük.

Ellenőrző kérdések:

1. Mit nevezünk valamely $\xi(t)$ jel adott eloszlás-sűrűségi függvénye ($f(x)$ ismeretében a jel várható értékének?
2. Mi a teljesítménysűrűség? Valóban teljesítményre utal?
3. Hogy hangzik a Parseval-tétel?
4. Mit nevezünk két zajforrás korrelációs együtthatójának? Milyen értékek között változhat?
5. Az ellenállás kapcsain mérhető termikus zaj effektív értéke milyen mértékben függ az ellenálláson átfolyó áramtól?
6. Miért okoz komoly gondot a flickerzaj, és milyen jellegű erősítők esetén?
7. Hogyan modellezzük valamely aktív négy-pólus saját zaját?
8. Mit nevezünk a négy-pólus zajszámának?
9. Mit nevezünk a négy-pólus optimális zaj-forrásellenállásának (R_{gopt})?
10. Milyen R_g belső ellenállás mellett a legkisebb a négy-pólus saját kimeneti zajteljesítménye?
11. Mely esetekben érdemes az erősítőrendszer bemenetén FET-bemenetű erősítőt használni?

Irodalomjegyzék

1. Ádám Tihamér: Amplitúdó-fázis függvény. Miskolci Tudományegyetem, Gépészmérnöki Kar. Oktatási segédanyag. Miskolc, 2008.
2. Dr. Ambrózy András: Elektronikus zajok. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972.
3. Dr. Ferenczy Pál: Hírközléelmélet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.
4. Dr. Ferenczy Pál: Kommunikációs eszközök. LSI Oktatóközpont.
5. Géher Károly–Solymosi János: Lineáris áramkörök tervezése. Tankönyvkiadó, Budapest 1992
6. Gräff József: Laplace transzformáció. BME Gépészmérnöki kar Gépészeti informatika tanszék. Budapest, 2006
7. Dr. Haizmann János–Dr. Varga Sándor – Dr. Zoltay József: Elektronikus áramkörök. Tankönyvkiadó, Budapest 1992.
8. Herpy Miklós – Berka Jan-Claude: Aktív RC szűrők. BME, Budapest, 1991.
9. Josephs, H.C.: A simple model for second breakdown. Electron Devices Meeting, 1965 International Volume 11, Issue , 1965 Page(s): 46 – 46
10. C.D. Motchenbacher, M.C. Fitchen.: Low Noise Electronic Design John Wiley&Sons, New York-London-Sydney-Toronto, 1973.
- 10a.C.D. Motchenbacher, M.C. Fitchen.: Kis-zajú elektronikus áramkörök tervezése. Ford.: Barcsay Kálmán. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977.
11. Dr. Selmeczi Kálmán-Schnöller Antal: Villamosságtan I.-II.-Példatár. BMF, 2006.
12. Claude Shannon – Warren Weaver: The mathematical theory of communication. University of Illinois Pr. 1949
13. Ulrich Tietze-Christoph Schenk: Analóg és digitális áramkörök. Műszaki Könyvkiadó Budapest, 1990.
14. Dr.Turmezei Péter: Analóg- és Hírközlési Áramkörök. Gyakorlatokhoz kiadott segédanyag. BMF, 2005.
15. Г.В. Войшвилло. „Электронные Усилители.” Советское Радио, Москва, 1961.
16. <http://wikipedia.org>